GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI
NILSON JOSÉ MACHADO

3ª edição

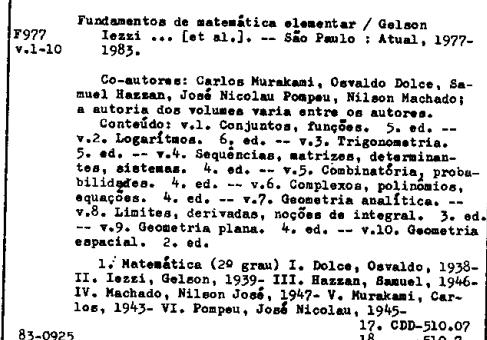
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 8

LIMITES DERIVADAS NOÇÕES DE INTEGRAL

60 exercícios resolvidos com resposta
266 exercícios propostos com resposta
100 testes de vestibular com resposta

ATUAL EDITORA

Capa
Roberto Franklin Rondino
Sylvio Ulhoa Cintra Filho
Rua Inhambu, 1235 – S. Paulo

Composição e desenhos
AM Produções Gráficas Ltda.
Rua Castro Alves, 135 – S. Paulo

Artes
Atual Editora Ltda.

Fotolitos
H.O.P. Fotolitos Ltda.
Rua Delmira Ferreira, 325 – S. Paulo

CIP-Brasil. Catalogação-na-Publicação
Câmara Brasileira do Livro, SP

F977
v.1-10

Fundamentos de matemática elementar / Gelson Iezzi ... [et al.]. -- São Paulo : Atual, 1977-1983.

Co-autores: Carlos Murakami, Osvaldo Dolce, Samuel Hazzan, José Nicolau Pompeu, Nilson Machado; a autoria dos volumes varia entre os autores.
Conteúdo: v.1. Conjuntos, funções. 5. ed. -- v.2. Logarítmos. 6. ed. -- v.3. Trigonometria. 5. ed. -- v.4. Sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 4. ed. -- v.5. Combinatória, probabilidades. 4. ed. -- v.6. Complexos, polinômios, equações. 4. ed. -- v.7. Geometria analítica. -- v.8. Limites, derivadas, noções de integral. 3. ed. -- v.9. Geometria plana. 4. ed. -- v.10. Geometria espacial. 2. ed.

1. Matemática (2º grau) I. Dolce, Osvaldo, 1938- II. Iezzi, Gelson, 1939- III. Hazzan, Samuel, 1946- IV. Machado, Nilson José, 1947- V. Murakami, Carlos, 1943- VI. Pompeu, José Nicolau, 1945-

83-0925 17. CDD-510.07
18. -510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Estudo e ensino 510.07 (17.)
510.7 (18.)

ATUAL EDITORA LTDA.
rua josé antonio coelho, 785
Telefone: 575 - 1544
04011 – São Paulo – SP

LUYLVVS

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colegial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colegial mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim, ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

CAPÍTULO I — FUNÇÕES

CAPÍTULO II — LIMITES

CAPÍTULO III — O INFINITO

CAPÍTULO IV — COMPLEMENTOS SOBRE LIMITES

CAPÍTULO V — CONTINUIDADE

CAPÍTULO VI — DERIVADAS

CAPÍTULO VII — REGRAS DE DERIVAÇÃO

CAPÍTULO VIII — ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

CAPÍTULO IX — NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL

Karl T. W. Weierstrass
(1815 - 1897)

Boêmio revela-se em Matemática

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu na Alemanha, de família católica liberal.

Weierstrass não gostava de música mas saiu-se muito bem nos estudos. Incentivado por seu pai, foi para a Universidade de Bonn estudar Direito. Aí se tornou perito em beber e em esgrima em lugar de Direito e Matemática, saindo sem graduar-se.

Em Münster preparou-se para o ensino secundário, onde foi protegido por Gudermann, que iniciou Weierstrass em teoria das funções, seguindo os passos de Abel.

Obteve seu diploma de professor aos 26 anos, ensinando em várias escolas secundárias e mais tarde na Universidade de Berlim, onde em suas conferências dava ênfase à "teoria estática da variável", sem nenhum recurso de pontos ou retas móveis, nenhum abandono de quantidades infinitamente pequenas, só ocupando-se dos números reais, da operação de adição e sua inversa e da relação "menor que".

O simbolismo de Weierstrass e seu aluno Heine expulsou do Cálculo a noção de variabilidade, sendo desnecessário usar infinitesimais fixos. Estava assim tentando substituir conceitos intuitivos por precisão lógica e demonstrações rigorosas.

Weierstrass tentou separar o Cálculo da Geometria baseando-se apenas no conceito de números. Para isso foi necessário definir número irracional independentemente de limite. Chegou à conclusão da existência de um limite de uma seqüência convergente tomando a própria seqüência como o número ou limite e definiu número irracional como seqüência ordenada de um agregado de racionais, contribuindo não só para a definição de número real mas também para um melhor conceito de limites, que é em essência o que temos hoje.

Weierstrass fez suas primeiras descobertas aos quarenta anos de idade e foi reconhecido como o maior analista do mundo, notável exceção da idéia comumente aceita de que um matemático deve revelar-se cedo.

CAPÍTULO I

FUNÇÕES

Neste capítulo resumiremos aspectos essenciais do estudo das funções, feito ao longo dos volumes 1, 2 e 3 desta coleção. Introduziremos mais algumas noções que serão necessárias ao desenvolvimento deste livro.

I. A NOÇÃO DE FUNÇÃO

1. Definição

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se *relação de A em B* um conjunto formado por pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo

Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, então:

$R_1 = \{(a, 0)\}$

$R_2 = \{(a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$

$R_3 = \{(a, 0), (b, 1), (c, 1), (d, 2)\}$

são três exemplos de relações de A em B.

2. Definição

Uma relação f de A em B recebe o nome de *função definida em A com imagens em B* ou *aplicação de A em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

No exemplo anterior, só a relação R_3 é uma função, pois em R_1 os elementos b, c, d não participam de nenhum par e em R_2 o elemento b participa de dois pares.

3. Lei de correspondência

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado um $x \in A$, determina-se o $y \in B$ de modo que $(x, y) \in f$.

Assim, por exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e a sentença aberta $y = x^2$, é possível considerar a função:

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

de A em B, cujos pares (x, y) verificam a lei $y = x^2$.

Para indicarmos uma função f de A em B que obedece à lei de correspondência $y = f(x)$, vamos usar a seguinte notação:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Freqüentemente encontramos funções em que a lei de correspondência para obter y a partir de x muda, dependendo do valor de x. Dizemos que essas funções são *definidas por várias sentenças*.

Exemplos

1º) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leqslant 0 \\ -1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é uma função definida por duas sentenças:

$y = 1$ (quando $x \leqslant 0$)
ou
$y = -1$ (quando $x > 0$)

2º) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ x, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

é uma função definida por três sentenças:

$y = -x$ quando $x \in]-\infty, 0[$
ou
$y = 0$ quando $x \in [0, 1[$
ou
$y = x$ quando $x \in [1, +\infty[$

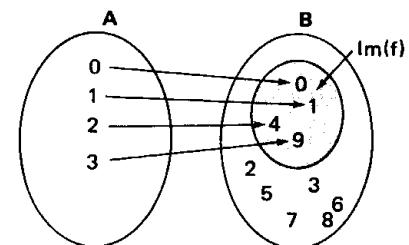
As funções definidas por várias sentenças têm uma importância especial neste livro.

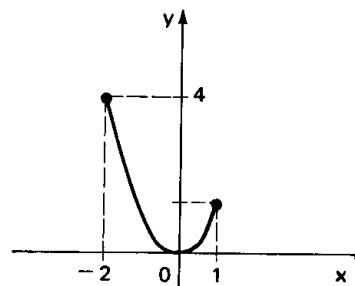
4. Domínio e imagem

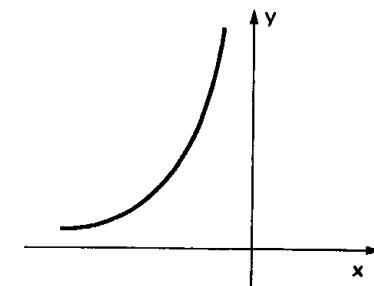
Chama-se *domínio* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto A. Notação: D(f).

Chama-se *imagem* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto constituído pelos elementos $y \in B$ para os quais existe algum $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Notação: Im(f).

Chama-se *contradomínio* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto B. Notação: CD(f).

Por exemplo, se $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $f: A \longrightarrow B$ é definida pela sentença $y = x^2$, temos:

$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
$D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$
$Im(f) = \{0, 1, 4, 9\}$
$CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

É evidente que, para todo f, $Im(f) \subset B$.

Lembremos ainda que, feita a representação cartesiana (gráfico) da função f, temos:

I) *Domínio D(f)* é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico, isto é, o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais por eles conduzidas interceptam o gráfico.

II) *Imagem Im(f)* é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico, isto é, o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais por eles conduzidas interceptam o gráfico.

Exemplos

$D(f) = [-2, 1]$
$Im(f) = [0, 4]$

$D(f) = \mathbb{R}_-^*$
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Uma função está bem definida quando são conhecidos D(f), CD(f) e a lei de correspondência $y = f(x)$. É comum, entretanto, darmos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ para nos referirmos a uma função f. Neste caso, fica subentendido que D(f) é o conjunto formado pelos números reais cujas imagens são reais, isto é:

$$x \in D(f) \iff y = f(x) \in \mathbb{R}$$

5. Funções iguais

Duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: C \longrightarrow D$ são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos

1º) Se $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4\}$, as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ são iguais pois:

$f(-1) = (-1)^2 = (-1)^4 = g(-1)$
$f(0) = 0^2 = 0^4 = g(0)$
$f(1) = 1^2 = 1^4 = g(1)$

2º) Se $A = \mathbb{R}^*$ e $B = \mathbb{R}$, as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$ dadas por $f(x) = x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$ são iguais pois, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$f(x) = x - 2 = \frac{x}{x} \cdot (x - 2) = \frac{x^2 - 2x}{x} = g(x)$$

II. PRINCIPAIS FUNÇÕES ELEMENTARES

6. Funções polinomiais

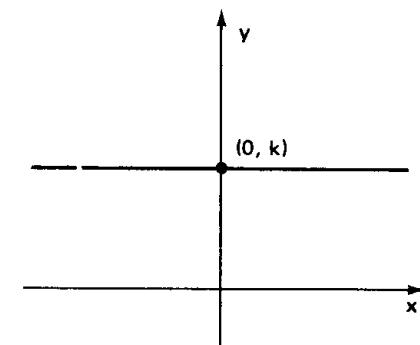
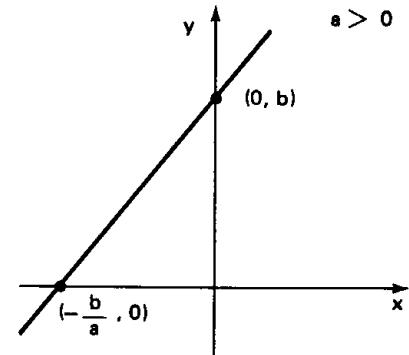
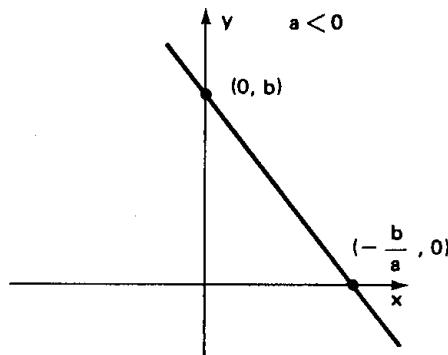
Dada a seqüência finita de números reais $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, chama-se função polinomial associada a esta seqüência a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

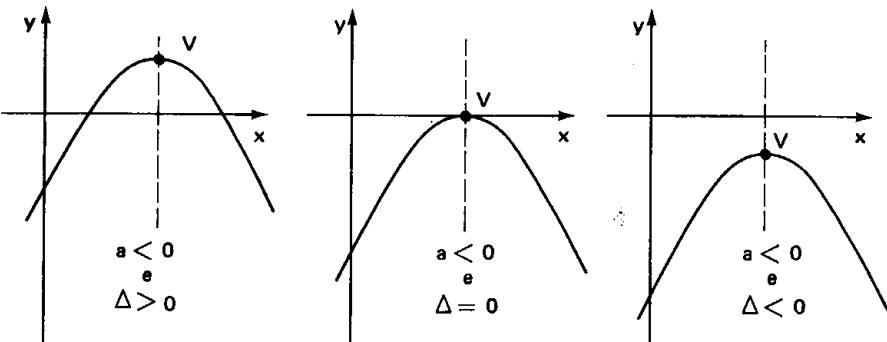
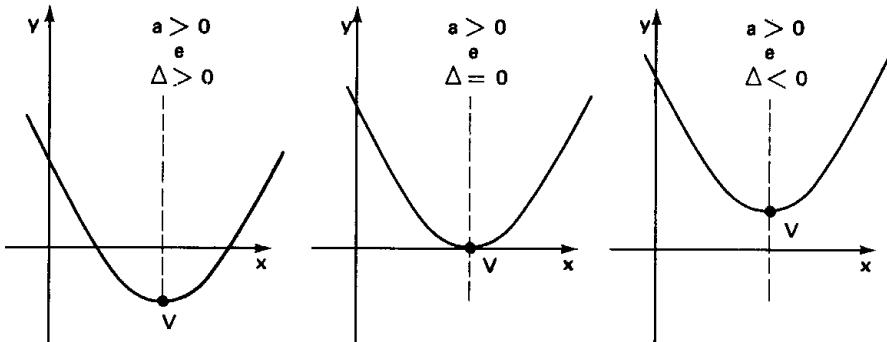
Os reais $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são chamados *coeficientes* e as parcelas $a_0, a_1 x, a_2 x^2, ..., a_n x^n$ são denominadas *termos* da função polinomial.

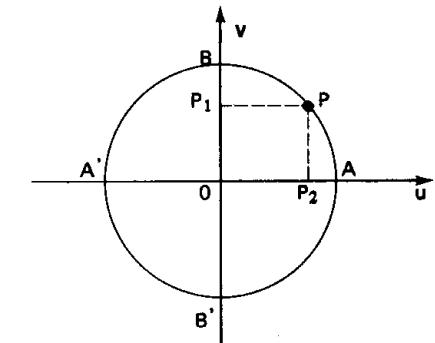
Uma função polinomial que tem todos os coeficientes nulos é chamada *função nula.*

Chama-se *grau* de uma função polinomial f, não nula, o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

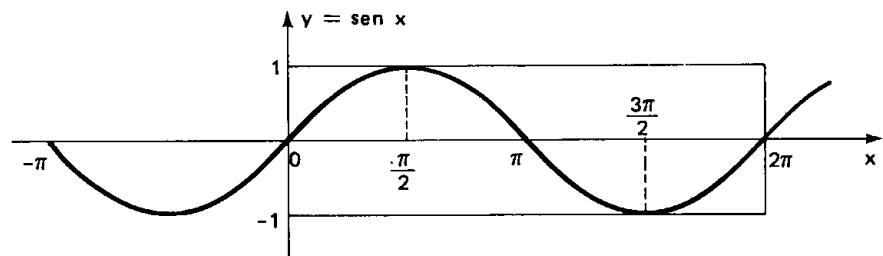
Exemplos

1º) $f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3$ tem grau 3
2º) $g(x) = 2 + 3x^2$ tem grau 2
3º) $h(x) = 1 + 4x$ tem grau 1
4º) $i(x) = 3$ tem grau 0

Uma função polinomial do tipo $f(x) = k$, isto é, uma função em que $a_0 = k$ e $a_1 = a_2 = ... = 0$ é chamada *função constante.*

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x, pelo ponto (0, k). A imagem é o conjunto $Im = \{k\}$.

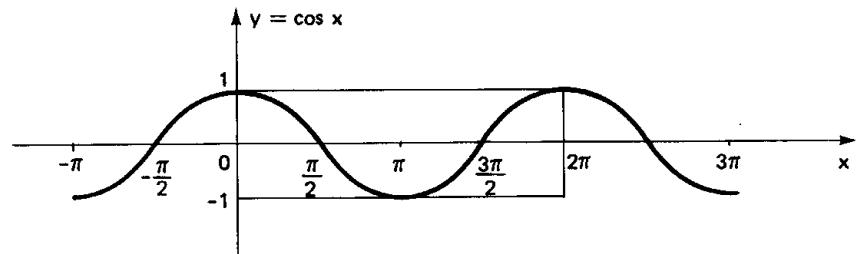
Uma função polinomial que apresenta $a_0 = b, a_1 = a \neq 0$ e $a_2 = a_3 = ... = 0$ é chamada *função afim*, portanto, afim é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

O gráfico de uma função afim é uma reta passando pelos pontos (0, b) e $(-\frac{b}{a}, 0)$. Quando $a > 0$, a função afim é crescente e, se $a < 0$, ela é decrescente. Sua imagem é $\mathbb{R}$.

Uma função polinomial que tem $a_0 = c$, $a_1 = b$, $a_2 = a \neq 0$ e $a_3 = a_4 = \ldots = 0$ é chamada *função quadrática*, portanto, quadrática é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$ e vértice no ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, para baixo. Conforme $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo, nulo ou negativo, a intersecção da parábola com o eixo dos x é formada por 2, 1 ou nenhum ponto, respectivamente.

Assim, são os seguintes seis tipos de gráficos que podem ser obtidos para funções quadráticas.

7. Funções circulares

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. As coordenadas de P em relação ao sistema uOv, $\overline{OP_2}$ e $\overline{OP_1}$, são **chamadas** $\cos x$ (cosseno de x) e $\operatorname{sen} x$ (seno de x), respectivamente.

Chama-se *função seno* a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

São notáveis as seguintes propriedades da função seno:

1ª) sua imagem é $\operatorname{Im} = [-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) é periódica e seu período é 2π;

3ª) seu gráfico é a senóide.

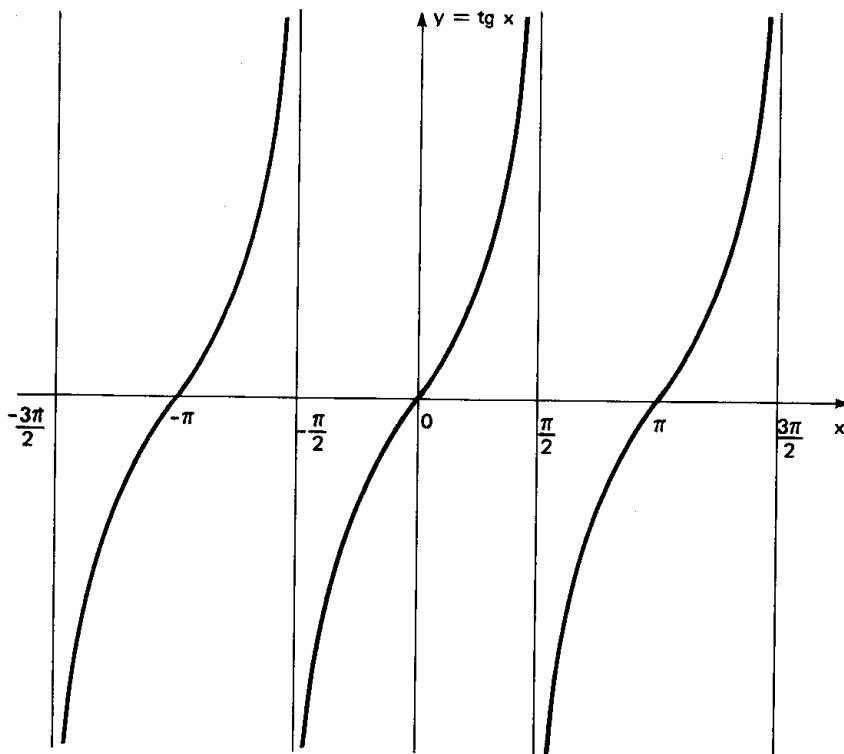
Chama-se *função cosseno* a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

São notáveis as seguintes propriedades da função cosseno:

1ª) sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) é periódica e seu período é 2π;

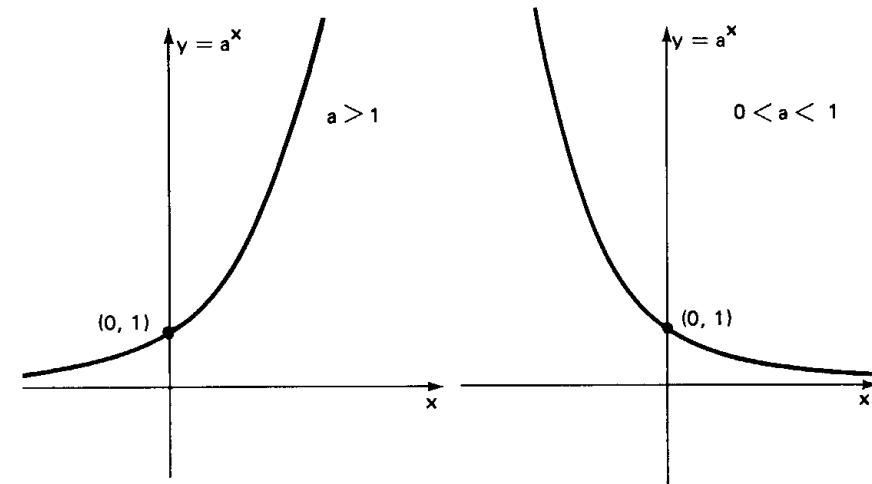
3ª) seu gráfico é a cossenóide.

Para $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ sabemos que $\cos x \neq 0$ e, então, existe o quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$, denominado tg x.

Chama-se *função tangente* a função $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x o real $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, isto é, $f(x) = \text{tg } x$.

Destacam-se as seguintes propriedades da função tangente:

1ª) sua imagem é $\mathbb{R}$, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{tg } x = y$;

2ª) é periódica e seu período é π;

3ª) seu gráfico é a tangentóide.

8. Funções exponenciais

Dado um número real *a*, com $0 < a \neq 1$, chama-se ***função exponencial de base a*** a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = a^x$.

Destacamos as seguintes propriedades das funções exponenciais:

1ª) sua imagem é $\mathbb{R}_+^*$, isto é, $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) se $0 < a < 1$, a função é decrescente e, se $a > 1$ a função é crescente;

3ª) seu gráfico tem um dos seguintes aspectos:

EXERCÍCIOS

H.1 Construir os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < -1 \\ 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e) $f_5(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 0 \\ (x - 1)^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

f) $f_6(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

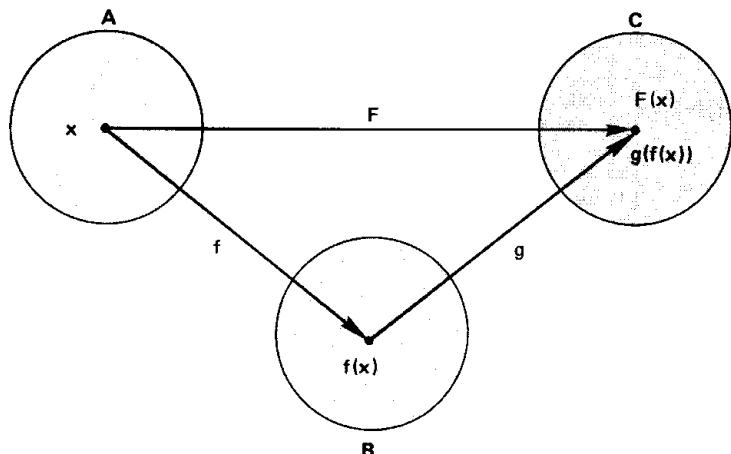
H.2 Construir os gráficos das seguintes funções elementares:

a) $f(x) = |x|$, isto é, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$.

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

d) $i(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

e) $j(x) = x^3$.

H.3 Construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{para } x \leqslant 0 \\ 2^x, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

III. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

9. Definição

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$, chama-se *função composta de g com f* a função $F: A \longrightarrow C$ definida pela lei $F(x) = g(f(x))$.

Isto quer dizer que a função F leva cada $x \in A$ no elemento $F(x)$ obtido da seguinte forma: sobre $x \in A$ aplica-se f, obtendo o elemento $f(x) \in B$, e sobre $f(x)$ aplica-se g, obtendo-se o elemento $g(f(x)) \in C$, também chamado $F(x)$.

A função F, composta de g e f, também pode ser indicada com o símbolo $g \circ f$ (lê-se: "g círculo f").

10. Exemplos

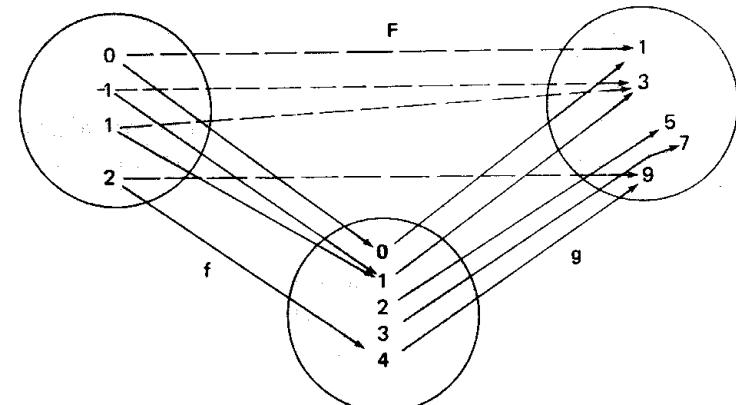
1º) Consideremos os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Consideremos também as funções $f: A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = x^2$ e $g: B \longrightarrow C$ tal que $g(x) = 2x + 1$.

É imediato que:

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = 4.$$

Também é evidente que:

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 3, \quad g(2) = 5, \quad g(3) = 7, \quad \text{e} \quad g(4) = 9$$

Neste caso, a função composta F é a função de A em C que tem o seguinte comportamento:

$$F(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 3$$
$$F(0) = g(f(0)) = g(0) = 1$$
$$F(1) = g(f(1)) = g(1) = 3$$
$$F(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$$

O esquema ilustra o que ocorreu:

A função F tem também uma lei de correspondência que pode ser encontrada se procurarmos o valor de $F(x)$:

$$F(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

De forma geral, para obtermos a lei de correspondência da função composta $F = g \circ f$ devemos trocar x por $f(x)$ na lei de g.

2º) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = x^2$. A composta de g com f é a função $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \text{sen}^2 x$$

3º) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$. A composta de g com f é a função $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{2x}$$

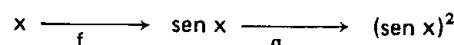
11. Observações

1ª) A composta $g \circ f$ só é definida quando o contradomínio de f é igual ao domínio de g.

2ª) Quando $A = C$, isto é, $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow A$ é possível definir duas compostas $g \circ f = F_1$ e $f \circ g = F_2$.

Assim, por exemplo, se $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por $g(x) = x^2 + 1$, temos:

$$F_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$F_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$$

sendo $F_1: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e $F_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

De maneira geral, quando ambas existem, $g \circ f$ e $f \circ g$ são funções distintas e isto nos obriga a dobrar a atenção quando compomos.

12.

Para a compreensão de alguns assuntos deste livro é fundamental que saibamos decompor (sempre que isto for possível) uma função em duas ou mais funções elementares.

Exemplos

1º) A função $F(x) = \text{sen}^2 x$ deve ser vista como $F(x) = (\text{sen } x)^2$, portanto, F é a composta $g \circ f$, sendo $g(x) = x^2$ e $f(x) = \text{sen } x$, uma vez que o esquema para calcular $F(x)$ a partir de x é o seguinte:

$$x \xrightarrow[f]{} \text{sen } x \xrightarrow[g]{} (\text{sen } x)^2$$

2º) A função $F(x) = \cos e^{3x^2+1}$ como seria decomposta? Olhando o esquema para calcular $F(x)$, temos:

$$x \xrightarrow[f]{} 3x^2 + 1 \xrightarrow[g]{} e^{3x^2+1} \xrightarrow[h]{} \cos e^{3x^2+1}$$

então F é a composta $h \circ (g \circ f)$, sendo $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = \cos x$.

EXERCÍCIOS

H.4 Se $f: A \longrightarrow B$ é dada pela lei $f(x) = x - 1$, $g: B \longrightarrow C$ é dada por $g(x) = 2x + 1$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determinar os pares ordenados que constituem $g \circ f$.

H.5 Se f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas leis $f(x) = x^3$ e $g(x) = x + 1$, obter as leis que definem as compostas: $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

H.6 Sejam as funções reais $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$. Determinar $h \circ g \circ f$ e $f \circ g \circ h$.

H.7 Determinar funções elementares f e g de modo que $g \circ f = F$, quando F é uma função real dada por uma das leis abaixo:

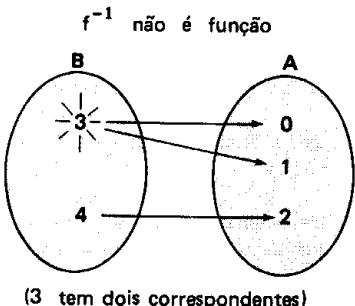
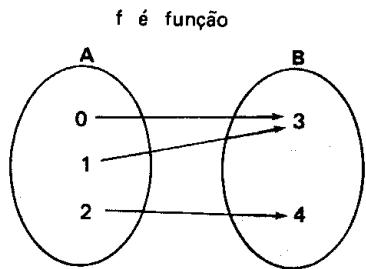
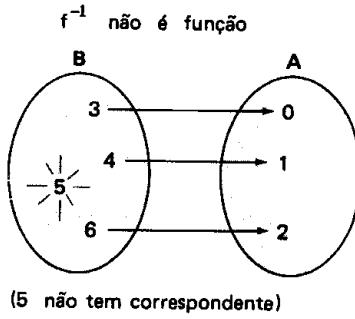
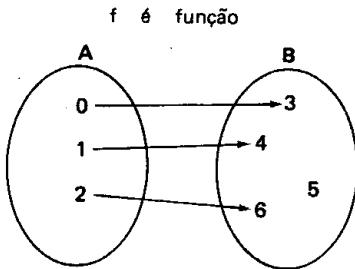
a) $F(x) = |x^2 + 1|$

b) $F(x) = \text{sen } (x^2 + 4)$

c) $F(x) = \text{tg } x^3$

d) $F(x) = \text{tg}^2 x$

e) $F(x) = 2^{\cos x}$

f) $F(x) = \text{sen } 3^x$

H.8 Determinar as funções elementares f, g e h de modo que $h \circ g \circ f = F$, sendo F uma função real dada por $F(x) = \cos 2^{x+3}$.

IV. FUNÇÕES INVERSÍVEIS

13. Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, consideremos a relação inversa de f:

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in f\}$$

Quase sempre f^{-1} *não* é uma função ou porque existe $y \in B$ para o qual não há $x \in A$ com $(y, x) \in f^{-1}$ ou porque para o mesmo $y \in B$ existem $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$, $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Vejamos dois exemplos:

(5 não tem correspondente)

(3 tem dois correspondentes)

É imediato que f^{-1} é uma função quando *todo* $y \in B$ é o correspondente de um *único* $x \in A$.

14. Definição

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é *inversível* se, e somente se, a relação inversa de f também é uma função, isto é, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Indica-se a função inversa de f com a notação f^{-1}.

15. Observações

1ª) Sendo f^{-1} a função inversa de f, temos as seguintes propriedades:

a) $D(f^{-1}) = B = Im(f)$
b) $Im(f^{-1}) = A = D(f)$
c) $(y, x) \in f^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in f$
d) o gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à reta $y = x$.

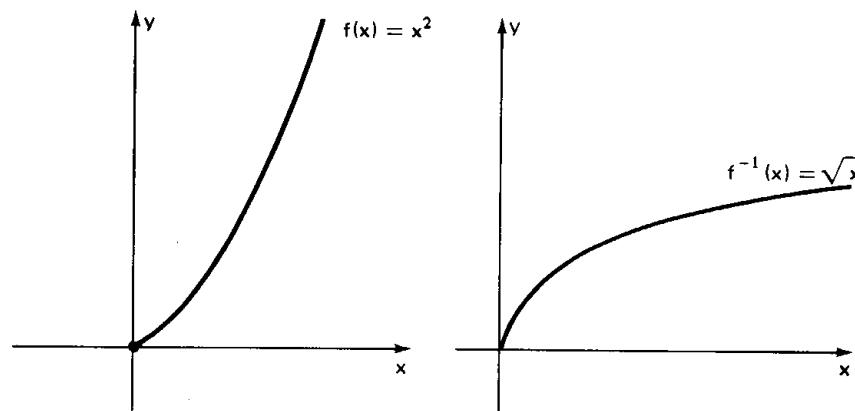
2ª) Dada a função inversível $f: A \longrightarrow B$, definida pela lei $y = f(x)$, para obtermos a lei que define f^{-1} procedemos assim:

a) transformamos algebricamente a expressão $y = f(x)$ até expressarmos x em função de $y: x = f^{-1}(y)$.
b) na lei $x = f^{-1}(y)$ trocamos os nomes das variáveis (x por y e vice-versa), obtendo a lei $y = f^{-1}(x)$.

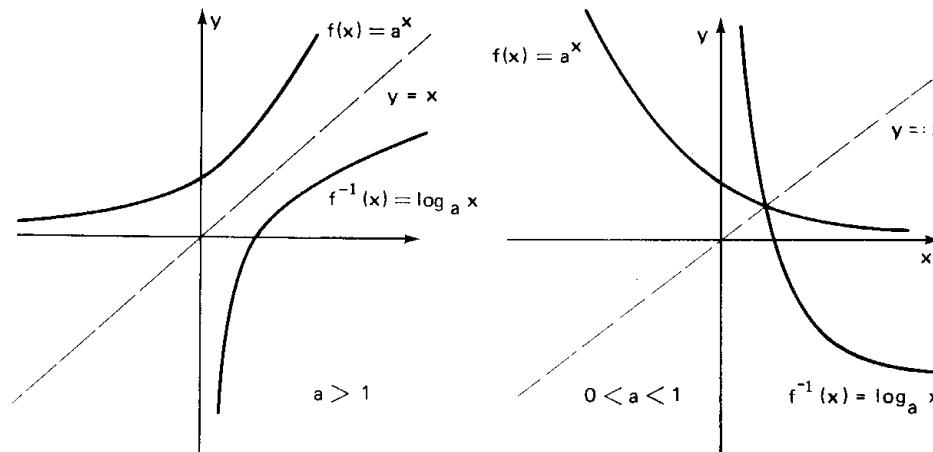
Assim, por exemplo, se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 3x + 2$ e queremos obter a inversa de f, temos:

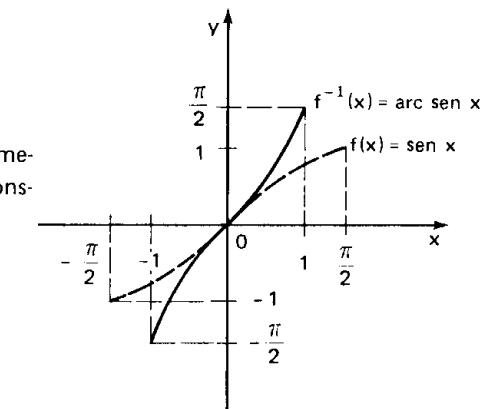
$$f(x) = y = 3x + 2 \Longrightarrow x = \frac{y - 2}{3}$$

Permutando as variáveis, temos:

$$y = \frac{x - 2}{3}$$

portanto, f^{-1} é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{3}$.

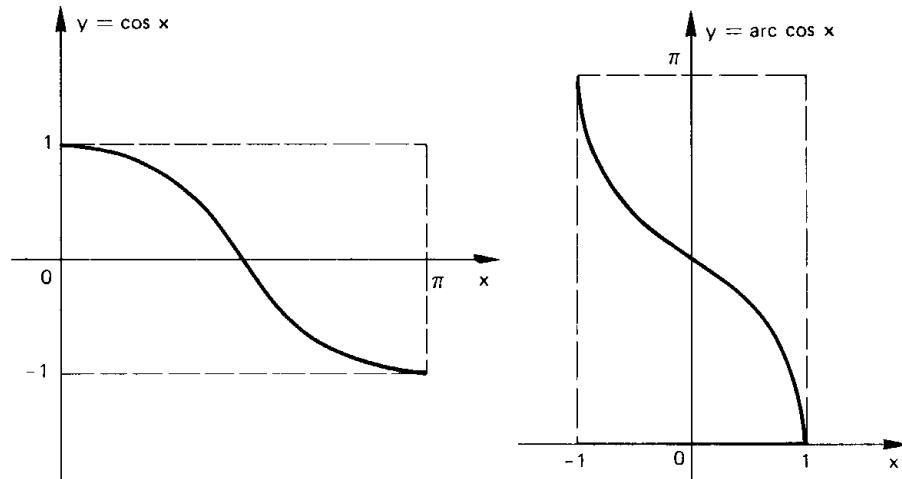
16. Inversas notáveis

Há algumas funções, inversas de funções elementares, cuja importância é grande para o estudo que faremos neste volume:

a. a função $y = \sqrt{x}$

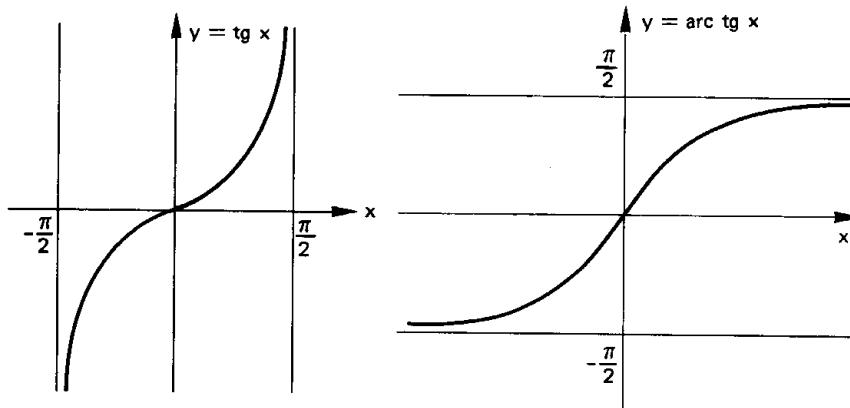
A função $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada pela lei de correspondência $y = x^2$ é inversível. Sua inversa é $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $y = \sqrt{x}$. Seus gráficos, simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante, são os seguintes:

b. a função logarítmica: $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$

A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada pela lei $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, chamada exponencial, é inversível. Sua inversa é $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = \log_a x$, chamada logarítmica. Dependendo do valor de *a*, os gráficos da logarítmica e da exponencial tomam um dos aspectos seguintes:

c. a função arco-seno: $y = \text{arc sen } x$

A função seno $(y = \text{sen } x)$, quando restrita ao domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e ao contradomínio $[-1, 1]$, é inversível e sua inversa é a função de $[-1, 1]$ em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dada pela lei $y = \text{arc sen } x$.

A partir da senóide, usando a simetria em relação à bissetriz $y = x$, construímos o gráfico ao lado.

d. a função arco-cosseno: $y = \text{arc cos } x$

A função cosseno $(y = \cos x)$, quando restrita ao domínio $[0, \pi]$ e ao contradomínio $[-1, 1]$, é inversível e sua inversa é a função de $[-1, 1]$ em $[0, \pi]$ dada pela lei $y = \text{arc cos } x$.

Analogamente a função anterior, temos o gráfico abaixo.

e. a função arco-tangente: $y = \text{arc tg } x$

A função tangente $(y = \text{tg } x)$, quando restrita ao domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e ao contra-domínio $\mathbb{R}$, é inversível e sua inversa é a função de $\mathbb{R}$ em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dada pela lei $y = \text{arc tg } x$. Eis o gráfico:

EXERCÍCIOS

H.9 Examinar cada uma das funções abaixo e estabelecer quais são inversíveis. Para estas, definir a inversa.

a) $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{a', b', c'\}$ tal que $f = \{(a, a'), (b, b'), (c, c')\}$.
b) $g: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5, 6, 7\}$ tal que $g(1) = 4$, $g(2) = 6$ e $g(3) = 4$.
c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 1 - 5x$.
d) $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(x) = x^3 - 2$.
e) $j: \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $j(x) = x^2$.
f) $p: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \frac{1}{x}$.

H.10 Determinar a inversa da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{quando } x \leqslant 1 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{quando } 1 < x \leqslant 3 \\ x^2 - 7, & \text{quando } x > 3 \end{cases}$$

H.11 Sejam as funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Determinar a função $g^{-1} \circ f^{-1}$.

H.12 Determinar a inversa da função $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log \sqrt{x}$.

H.13 Determinar a inversa da função $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada pela lei $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$.

V. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

17. Adição

Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *soma* $f + g$ a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Por exemplo, sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$. Sua soma é a função $h(x) = e^x + e^{-x}$.

18. Subtração

Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *diferença* $f - g$ a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Como exemplo, sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \log x$. Sua diferença é a função $h(x) = \text{sen } x - \log x$.

19. Multiplicação

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *produto fg* a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Assim, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, seu produto é a função $h(x) = x^2 \cdot \cos x$.

20. Quociente

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *quociente* $\frac{f}{g}$ a função $h: \bar{A} \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para $x \in \bar{A} = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Assim, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, seu quociente é a função $h(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

Autoditada cria a Análise

Gottfried Weilhelm Leibniz nasceu em Leipizig; aos quinze anos entrou na Universidade, aos dezessete já era bacharel e aos vinte doutorou-se em Nuremberg. Adquiriu grande conhecimento geral em Teologia, Direito, Filosofia e Matemática sendo considerado um dos últimos sábios. Viajou muito representando o governo como diplomata e, numa de suas visitas a Londres, em 1643, tornou-se membro do Royal Society.

Leibniz, por ser autodidata, freqüentemente redescobria teorias e as desenvolvias como é o caso de sua primeira realização em séries infinitas: $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, expansão da teoria de Gregori.

Ao estudar um problema proposto por Huygens, acabou por fazer uma descoberta, o triângulo harmônico, análogo ao triângulo de Pascal que fascinava Leibniz. Passou então a estudar as obras de Pascal sobre cilóides e séries infinitas, generalizando um método importante para soma e diferença de funções, tanto racionais como irracionais, algébricas ou transcendentes (palavra que ele criou).

Percebendo a grande importância das notações como auxiliar de pensamento, é responsável por muitas delas como dx e dy para diferenciais em x e y, $\int y dx$ para integral e foi o primeiro a empregar as expressões "cálculo diferencial", "cálculo integral" e "função". Usou o ponto para multiplicação e escreveu proporção na forma $a : b = c : d$ o que nos sugeriu: para indicar divisão. Ainda criou a notação $\sim$ para "é semelhante a" e $\simeq$ para "é congruente a". Leibniz e Newton é que persistiram no uso do sinal =, criado por Recorde, até hoje usado.

Em 1684, sob o título de "Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais", expõe, pela primeira vez, seu cálculo diferencial dando às fórmulas de derivação: $dxy = xdy + ydx$, $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ e $dx^n = n x^{n-1} dx$, juntamente com aplicações geométricas.

Gottfried W. Leibniz
(1646 — 1716)

Sua obra mais famosa é *"Acta Eruditorum"* (Anotações dos eruditos) onde observou uma diferenciação e integração são operações inversas enunciando o teorema fundamental do cálculo e mostrando que as funções transcendentes são fundamentais em Análise.

Sua teoria de diferenciação, pelas notações que usou, foi mais aceita do que a Teoria dos Fluxos de Newton, embora os dois tivessem desenvolvido a Análise na mesma época.

Em 1963, numa carta a L'Hospital, chegou a dar antecipação da teoria dos determinantes.

Como filósofo pretendia reduzir as discussões lógicas a formas sistemáticas. Otimista ao extremo, sempre acreditou numa futura universalização da linguagem, o que foi muito produtivo para a Matemática.

CAPÍTULO II

LIMITE

I. NOÇÃO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

21. Seja a função $f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)}$ definida para todo x real e $x \neq 1$.

Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$ obtendo $f(x) = 2x + 1$.

Estudemos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1.

Atribuindo a *x* valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Se atribuirmos a *x* valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, f(x) aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará f(x).

Notemos na primeira tabela que:

$x = 0{,}9 \implies f(x) = 2{,}8$ isto é, $x - 1 = -0{,}1 \implies f(x) - 3 = -0{,}2$

$x = 0{,}99 \implies f(x) = 2{,}98$ isto é, $x - 1 = -0{,}01 \implies f(x) - 3 = -0{,}02$

$x = 0{,}999 \implies f(x) = 2{,}998$ isto é, $x - 1 = -0{,}001 \implies f(x) - 3 = -0{,}002$

e, a segunda tabela nos mostra que:

$x = 1{,}1 \implies f(x) = 3{,}2$ isto é, $x - 1 = 0{,}1 \implies f(x) - 3 = 0{,}2$

$x = 1{,}01 \implies f(x) = 3{,}02$ isto é, $x - 1 = 0{,}01 \implies f(x - 3 = 0{,}02$

$x = 1{,}001 \implies f(x) = 3{,}002$ isto é, $x - 1 = 0{,}001 \implies (x) - 3 = 0{,}002$

portanto, pelas duas tabelas vemos que:

$|x - 1| = 0{,}1 \implies |f(x) - 3| = 0{,}2$
$|x - 1| = 0{,}01 \implies |f(x) - 3| = 0{,}02$
$|x - 1| = 0{,}001 \implies |f(x) - 3| = 0{,}002$

Observemos que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isto tomarmos x suficientemente próximo de 1.

Um outro modo de dizermos isto é dizer: *podemos tornar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno.*

22. A linguagem utilizada até aqui não é uma linguagem matemática, pois ao dizermos "$|f(x) - 3|$ tão pequeno quanto desejarmos" e "$|x - 1|$ suficientemente pequeno", não sabemos quantificar o quão pequenas devem ser essas diferenças.

A Matemática usa símbolos para indicar essas diferenças pequenas. Os símbolos usualmente são ϵ (epsilon) e δ (delta).

Assim, dado um número positivo ϵ, se desejamos $|f(x) - 3|$ menor que ϵ, devemos tomar $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo δ, suficientemente pequeno, de tal modo que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

A condição $0 < |x - 1|$ é neste caso equivalente a $0 \neq |x - 1|$, isto é, $x \neq 1$, porque estamos interessados nos valores de $f(x)$, quando x está próximo de 1, mas não para $x = 1$.

É importante perceber que δ depende do ϵ considerado. Nas duas tabelas vemos que:

1º) $|x - 1| = 0{,}1 \implies |f(x) - 3| = 0{,}2$
então se for dado $\epsilon = 0{,}2$, tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos que

$$0 < |x - 1| < 0{,}1 \implies |f(x) - 3| < 0{,}2$$

2º) $|x - 1| = 0{,}01 \implies |f(x) - 3| = 0{,}02$
então se for dado $\epsilon = 0{,}02$, tomamos $\delta = 0{,}01$ e temos:

$$0 < |x - 1| < 0{,}01 \implies |f(x) - 3| < 0{,}02$$

3º) $|x - 1| = 0{,}001 \implies |f(x) - 3| = 0{,}002$
então se for dado $\epsilon = 0{,}002$, tomamos $\delta = 0{,}001$ e temos:

$$0 < |x - 1| < 0{,}001 \implies |f(x) - 3| < 0{,}002$$

Notemos que, dado ϵ, tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Generalizando, afirmamos que, qualquer que seja o valor positivo ϵ, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ tal que

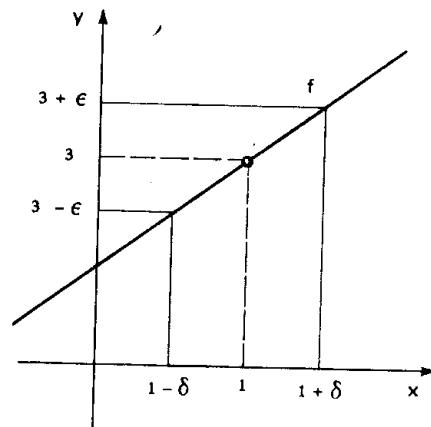
$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

De fato,

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{2} \implies 2\,|x - 1| < \epsilon \implies$$
$$\implies |2x - 2| < \epsilon \implies |\underbrace{2x + 1}_{f(x)} - 3| < \epsilon \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

Notando que

$0 < |x - 1| < \delta \iff 1 - \delta < x < 1 + \delta$ e $x \neq 1$

e

$|f(x) - 3| < \epsilon \iff 3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$

vejamos qual é o significado do ϵ e δ no gráfico ao lado.

- Para todo x entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$ e $x \neq 1$, temos os valores de $f(x)$ entre $3 - \epsilon$ e $3 + \epsilon$.

23. O valor considerado $\frac{\epsilon}{2}$ para δ não é único, é simplesmente o maior valor que δ pode assumir.

Assim se considerarmos $\delta_1 = \frac{\epsilon}{3}$ teremos também

$$0 < |x - 1| < \delta_1 = \frac{\epsilon}{3} \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

De fato:

$$0 < |x - 1| < \delta_1 = \frac{\epsilon}{3} \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \implies 2\,|x - 1| < \frac{2\epsilon}{3} \implies$$

$$\implies |2x - 2| < \frac{2\epsilon}{3} \implies |\underbrace{2x + 1}_{f(x)} - 3| < \frac{2\epsilon}{3} \implies$$

$$\left.\begin{array}{l} \implies |f(x) - 3| < \frac{2\epsilon}{3} \\ \text{mas } \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \end{array}\right\} \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

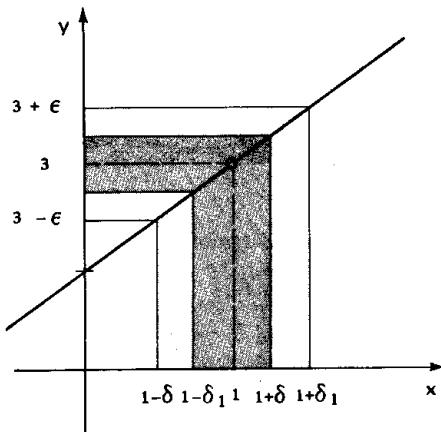
Considerando $\delta_1 < \delta$, percebemos que o intervalo de extremos $1 - \delta_1$ e $1 + \delta_1$ está contido no intervalo de extremos $1 - \delta$ e $1 + \delta$ e, portanto, todo x que satisfaz

$$1 - \delta_1 < x < 1 + \delta_1 \quad \text{e} \quad x \neq 1$$

satisfará

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \quad \text{e} \quad x \neq 1$$

e, conseqüentemente, teremos

$$3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$$

o que pode ser confirmado no gráfico ao lado.

Desde que, para qualquer valor positivo ϵ, podemos encontrar um valor apropriado para δ tal que

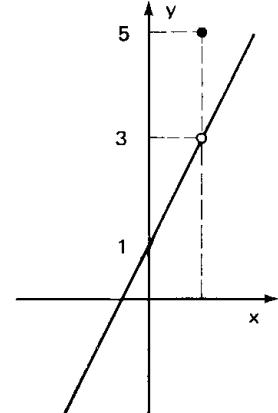
$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 3. Em símbolos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

II. DEFINIÇÃO DE LIMITE

24. Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real a. Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)}$$

É importante observarmos nesta definição que nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$, isto é, não é necessário que a função esteja definida em a. Assim no exemplo anterior, vimos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x + 1)\,(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

mas $f(x) = \dfrac{(2x + 1)\,(x - 1)}{(x - 1)}$ não está definida para $x = 1$.

Pode ocorrer que a função esteja definida em a e $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \neq f(1)$$

É importante ter sempre em mente no cálculo de $\lim_{x \to a} f(x)$ que interessa o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não o que ocorre com f quando $x = a$.

O próximo teorema afirma que uma função não pode aproximar-se de dois números diferentes quando x se aproxima de a. É o teorema da unicidade do limite de uma função; ele nos garante que se o limite de uma função existe, então ele é único.

25. Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$

Demonstração

Demonstraremos este teorema por redução ao absurdo.

Supondo $L_1 \neq L_2$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \overset{def}{\iff} (\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies$$
$$\implies |f(x) - L_1| < \epsilon) \quad ①$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_2 \overset{def}{\iff} (\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies$$
$$\implies |f(x) - L_2| < \epsilon) \quad ②$$

Escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplicando a desigualdade triangular ($|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$), temos:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| =$$
$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$ e, considerando ① e ②, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L_1| +$$
$$+ |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

mas $|L_1 - L_2| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$

e, portanto:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |L_1 - L_2| < 2\epsilon$$

Se tomarmos $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ vem

para $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$, $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies$

$\implies |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$

que é uma contradição e, portanto, a nossa suposição é falsa. Logo $L_1 = L_2$.

H.14 Seja a função f definida por $f(x) = 5x - 2$ para todo x real. Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$ encontre um δ para $\epsilon = 0{,}01$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

Solução

$|f(x) - 8| < 0{,}01 \iff |(5x - 2) - 8| < 0{,}01 \iff |5x - 10| < 0{,}01 \iff$
$\iff 5 \cdot |x - 2| < 0{,}01 \iff |x - 2| < 0{,}002$

Se tomarmos $\delta = 0{,}002$, teremos:

$$0 < |x - 2| < 0{,}002 \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

Notemos que qualquer número positivo menor que 0,002 pode ser usado no lugar de 0,002 como sendo o δ pedido, isto é, se $0 < \delta_1 < 0{,}002$, a afirmação

$$0 < |x - 2| < \delta_1 \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

é verdadeira, porque todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x - 2| < \delta_1$ satisfará também a desigualdade $0 < |x - 2| < \delta$.

H.15 Seja f uma função tal que $f(x) = 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Se $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, encontre um δ para $\epsilon = 0{,}01$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 5| < 0{,}01$

H.16 Dada a função f tal que $f(x) = 5 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, determine um número δ para $\epsilon = 0{,}001$ de modo que $0 < |x + 2| < \delta \implies |f(x) - 9| < \epsilon$, sabendo que $\lim_{x \to -2} f(x) = 9$.

H.17 Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ definida para todo *x* real e $x \neq -1$. Sabendo que $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$, calcular δ de modo que $0 < |x + 1| < \delta \implies |f(x) + 2| < 0{,}01$.

H.18 Supondo conhecido que $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2} = 4$, quão próximo de $\dfrac{2}{3}$ deve estar *x* para que a fração $\dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}$ esteja próxima de 4, com aproximação inferior a 0,0001?

H.19 Usando a definição demonstre que $\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5$.

Solução

Devemos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

Notemos que

$$|(3x + 2) - 5| < \epsilon \iff |3x - 3| < \epsilon \iff 3\,|x - 1| < \epsilon \iff |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

Assim, se escolhermos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, teremos:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\epsilon}{3} > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

De fato se

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{3} \Longrightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \Longrightarrow 3\,|x - 1| < \epsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |3x - 3| < \epsilon \Longrightarrow |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

H.20 Demonstre usando a definição que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 1) = 7$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (4 - 2x) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (3x - 2) = -5$

H.21 Demonstre usando a definição que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Solução

Devemos provar

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 1| < \epsilon$$

Notemos que

$$|x^2 - 1| < \epsilon \Longrightarrow -\epsilon < x^2 - 1 < \epsilon \Longrightarrow 1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$$

Suponhamos que o valor de δ que queremos encontrar seja menor ou igual a 1, isto é

$$0 < |x - 1| < \delta \leqslant 1 \Longrightarrow |x - 1| < 1 \Longrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Longrightarrow 0 < x < 2$$

e sendo $\epsilon' > 0$ tal que se $0 < \epsilon < 1$ então $\epsilon' = \epsilon$ ou se $\epsilon \geqslant 1$ então $0 < \epsilon' < 1$, temos

$$1 - \epsilon \leqslant 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \leqslant 1 + \epsilon \Longrightarrow 0 < 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} < |x| < \sqrt{1 + \epsilon'} \Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} < x < \sqrt{1 + \epsilon'} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \Longrightarrow \begin{cases} |x - 1| < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \\ \text{e} \\ |x - 1| < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} \end{cases}$$

Notando que

$$0 < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 < 1, \text{ temos:}$$

para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} > 0$ onde $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 1$ ou $0 < \epsilon' < 1$ se $\epsilon \geqslant 1$, tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 1| < \epsilon$$

De fato

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < x - 1 < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \Longrightarrow \sqrt{1 - \epsilon'} < x < \sqrt{1 + \epsilon'} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \Longrightarrow -\epsilon' < x^2 - 1 < \epsilon' \Longrightarrow |x^2 - 1| < \epsilon' \leqslant \epsilon$$

H.22 Prove pela definição de limite que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

b) $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + 1) = 10$

c) $\lim\limits_{x \to 2} (1 - x^2) = -3$

H.23 Prove pela definição de limite que

$$\lim_{x \to 2} \frac{9}{x + 1} = 3$$

Solução

Devemos provar

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon$$

Notemos que

$$\left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon \Longrightarrow -\epsilon < \frac{9}{x + 1} - 3 < \epsilon \Longrightarrow 3 - \epsilon < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon$$

Considerando $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 3$ ou $0 < \epsilon' < 3$ se $\epsilon \geqslant 3$, temos:

$$3 - \epsilon \leqslant 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \leqslant 3 + \epsilon \Longrightarrow 0 < 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \Rightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{3 - \epsilon'} > \frac{x + 1}{9} > \frac{1}{3 + \epsilon'} \Longrightarrow \frac{9}{3 - \epsilon'} > x + 1 > \frac{9}{3 + \epsilon'} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{9}{3 - \epsilon'} - 3 > x - 2 > \frac{9}{3 + \epsilon'} - 3 \Longrightarrow \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} > x - 2 > \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} |x - 2| < \dfrac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \\ \text{e} \\ |x - 2| < \dfrac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} \end{cases}$$

Notando que $0 < \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} > 0$ onde $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 3$ ou $0 < \epsilon' < 3$ se $\epsilon \geqslant 3$, tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon$$

De fato:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |x - 2| < \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < x - 2 < \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < x - 2 < \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \implies \frac{9}{3 + \epsilon'} - 3 < x - 2 < \frac{9}{3 - \epsilon'} - 3 \implies$$

$$\implies \frac{9}{3 + \epsilon'} < x + 1 < \frac{9}{3 - \epsilon'} \implies \frac{1}{3 + \epsilon'} < \frac{x + 1}{9} < \frac{1}{3 - \epsilon'} \implies$$

$$\implies 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \implies - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} - 3 < \epsilon' \implies$$

$$\implies \left| \frac{9}{x + 1} - 3 \right| < \epsilon' \leqslant \epsilon.$$

H.24 Prove pela definição de limite que:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6}{x + 2} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4}{3 - x} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{2x - 5} = 2$

H.25 Prove pela definição de limite que:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2}{x - 1} = 4$

H.26 Prove pela definição de limite que:

$\lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1$

IV. PROPRIEDADES DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO

26. No parágrafo anterior vimos que, para provarmos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, devemos exibir um $\delta > 0$ para um dado $\epsilon > 0$.

Considerando que freqüentemente uma função é construída a partir de funções mais simples; por exemplo **uma** função polinomial f é uma soma finita de funções do tipo $f_i(x) = a_i x^i$ onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, isto é:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$$

Se as funções f_i têm limites para x tendendo a a, então uma combinação conveniente nos fornece o limite de f quando x tende a a.

A fim de que não tenhamos que voltar repetidamente à definição de limite para provarmos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, vamos apresentar as propriedades algébricas do limite de uma função.

No que segue estamos supondo que a é elemento de um intervalo aberto I, e que em $I - \{a\}$ estão definidas as funções $f, g, \dots$ "envolvidas" na propriedade.

27. 1ª Propriedade

"Se f é a função definida por $f(x) = c$ onde $c \in \mathbb{R}$, para todo x real, então $\lim\limits_{x \to a} c = c$".

Demonstração

Devemos provar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \epsilon$$

É sempre verdadeiro, pois

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

28. 2ª Propriedade

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot L$.

Demonstração

Devemos considerar dois casos:

1º caso $c = 0$

Se $c = 0$ então $c \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$ e $c \cdot L = 0 \cdot L = 0$

Pela 1ª propriedade temos

$$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = \lim_{x \to a} 0 = 0 = c \cdot L$$

2º caso $c \neq 0$

Devemos provar

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$$

Temos por hipótese

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Então $\forall \epsilon > 0$, considerando $\frac{\epsilon}{|c|}$, temos:

$$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

isto é

$$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c| \cdot |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|} \cdot |c| = \epsilon$$

ou seja

$$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$$

29. 3ª Propriedade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L + M$.

Demonstração

Devemos provar

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0$, consideremos $\frac{\epsilon}{2}$. Temos:

$$\exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e portanto $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$, vem

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Mas pela desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) - L| + |g(x) - M| \leqslant |f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f + g)(x) - (L + M)|$$

então

$$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$$

30. Esta propriedade pode ser estendida para uma soma de um número finito de funções, isto é,

Se $\lim_{x \to a} f_i(x) = L_i$, $i \in N$ e $1 \leqslant i \leqslant n$,

então

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução finita

1ª PARTE

Para $n = 1$ é verdadeira, pois

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{1} f_i(x)\right) = \lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 = \sum_{i=1}^{1} L_i$$

2ª PARTE

Supondo que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é,

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{p} L_i$$

provemos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{p+1} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{p+1} L_i$$

De fato

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{p+1} f_i\right)(x) = \lim_{x \to a} \left[\left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right) + f_{p+1}\right](x) =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)(x) + \lim_{x \to a} f_{p+1}(x) = \sum_{i=1}^{p+1} L_i + L_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} L_i$$

31. 4ª Propriedade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = L - M$

Demonstração

$$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x) + (-1) \cdot g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} [(-1) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

32. Antes de passarmos para a próxima propriedade vamos considerar dois lemas.

Lema 1

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$

Prova

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \ \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon) \iff$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L - 0| < \epsilon) \iff$$

$$\iff \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$$

Lema 2

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = 0$.

Prova

Devemos provar que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$$

Considerando que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

e fazendo $\epsilon = 1$, vem

$$\exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < 1$$

mas $|f(x)| - |L| \leqslant |f(x) - L|$ e portanto:

$$\exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x)| < 1 + |L| \quad (1)$$

Considerando que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| < \epsilon$$

e tomando $\dfrac{\epsilon}{1 + |L|}$ temos

$$\exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |L|}$$

isto é,

$$\exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies (1 + |L|) \cdot |g(x)| < \epsilon \quad (2)$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e portanto $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$, temos

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies$$

$$\implies |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \underset{(1)}{<} (1 + |L|) \cdot |g(x)| \underset{(2)}{<} \epsilon$$

33. 5ª Propriedade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = LM$

Demonstração

Notemos que

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - LM + LM$$

isto é,

$$(f \cdot g)(x) = [f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM$$

Considerando que

1) $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0,$

2) $\lim_{x \to a} g(x) = M \iff \lim_{x \to a} (g(x) - M) = 0,$

3) $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M \implies \lim_{x \to a} [(f(x) - L) \cdot g(x)] = 0$

temos

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} \{[f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM\} =$$

$$= \lim_{x \to a} \{[f(x) - L] \cdot g(x)\} + \lim_{x \to a} \{L \cdot [g(x) - M]\} + \lim_{x \to a} LM =$$

$$= 0 + L \cdot \lim_{x \to a} [g(x) - M] + LM = L \cdot 0 + LM = LM$$

34. Esta propriedade pode ser estendida para um produto de um número finito de funções, isto é, se

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = L_i \text{ então } \lim_{x \to a} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \prod_{i=1}^{n} L_i \quad (*)$$

$i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$

A demonstração por indução finita fica como exercício.

35. 6ª Propriedade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então $\lim_{x \to a} (f)^n(x) = L^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

(Trata-se do caso particular da propriedade vista no parágrafo **34**, fazendo $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$).

36. Antes da próxima propriedade, vejamos mais dois lemas

Lema 3

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ então existem δ e N positivos tais que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > N.$$

Prova

De $\lim_{x \to a} f(x) = L$ vem:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{|L|}{2}$ temos

$$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \frac{|L|}{2} \implies$$

$$\Rightarrow -\frac{|L|}{2} < f(x) - L < \frac{|L|}{2} \Rightarrow L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}.$$

Então são possíveis dois casos:

i) se $L > 0$ então $0 < \dfrac{L}{2} < f(x) < \dfrac{3L}{2}$

ii) se $L < 0$ então $\dfrac{3L}{2} < f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$

então, para $L \neq 0$, temos $0 < \left|\dfrac{L}{2}\right| < |f(x)| < \left|\dfrac{3L}{2}\right|.$

Considerando $N = \left|\dfrac{L}{2}\right| > 0$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > N$$

Lema 4

Se $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$ então $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}.$

Prova

Considerando que $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, pelo lema 3, temos:

$$\exists \delta_1, N > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x)| > N \implies$$

$$\implies \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{N}$$

De $\lim_{x \to a} g(x) = M$, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - M| < \epsilon$$

(*) O símbolo $\prod_{i=1}^{n} f_i$ (lê-se: produtória dos fatores f_i, com $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i < n$ significa:

$$\prod_{i=1}^{n} f_i = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n.$$

Considerando $\epsilon \cdot |M| \cdot N$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \epsilon \cdot |M| \cdot N$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, vem:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| \cdot |M|} = |g(x) - M| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|M|} < \frac{\epsilon \cdot |M| \cdot N}{N \cdot |M|} =$$

$= \epsilon$

37. 7ª Propriedade

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.

Demonstração

Pelo lema 4 temos:

$$\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

então

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

38. 8ª Propriedade

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com $L \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L < 0$ e n é ímpar.

A demonstração deste teorema será feita oportunamente, mas iremos aplicá-lo quando for necessário.

Por uma questão de simplicidade indicaremos as propriedades de limites, como sendo as propriedades L e vamos fazer rápido sumário dessas propriedades.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ então:

L_1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

L_2. $\lim\limits_{x\to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot L$

L_3. $\lim\limits_{x\to a} [(f + g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

L_4. $\lim\limits_{x\to a} [(f - g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

L_5. $\lim\limits_{x\to a} [(f \cdot g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

L_6. $\lim\limits_{x\to a} [(f)^n(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$

L_7. $\lim\limits_{x\to a} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

L_8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (se $n \in \mathbb{N}^*$ e $L \geqslant 0$ ou se n é ímpar e $L \leqslant 0$)

V. LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Uma das conseqüências das propriedades L é a regra para obter o limite de uma função polinomial.

39. Teorema

O limite de uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$ para x tendendo para a, é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x = a$.

Antes de provarmos esta proposição, provemos que $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

É trivialmente verdadeira pois, dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \epsilon$ e temos $0 < |x - a| < \epsilon \Longrightarrow |x - a| < \epsilon$.

Provemos agora que $\lim\limits_{x\to a} \left[\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i x^{n-i})\right] = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i a^{n-i})$.

De fato, por aplicações sucessivas das propriedades, temos

$$\lim_{x\to a}\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i x^{n-i})\right] = \sum_{i=0}^{n}\left[\lim_{x\to a}(a_i x^{n-i})\right] = \sum_{i=0}^{n}\left[a_i(\lim_{x\to a} x^{n-i})\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left[a_i(\lim_{x\to a} x)^{n-i}\right] = \sum_{i=0}^{n}(a_i a^{n-i})$$

EXERCÍCIOS

H.27 Calcule os seguintes limites, especificando em cada passagem a propriedade ou o teorema utilizado.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

Solução

a) pelo teorema da função polinomial (T), vem:

$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 2) = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 2 = 4$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \overset{(L_7)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2 + 2x - 3)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x - 3)} \overset{(T)}{=} \dfrac{-4}{-7} = \dfrac{4}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_6)}{=} \left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_7)}{=}$

$\left(\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - x + 1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x - 2)}\right)^2 \overset{(T)}{=} 2^2 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_8)}{=} \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_7)}{=}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2 + 4x - 3)}} \overset{(T)}{=} \sqrt[3]{-8} = -2$

H.28 Calcule os seguintes limites, especificando em cada passagem a propriedade ou o teorema utilizado.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2 - 7x + 5)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3 - 2x^2 - 4x + 3)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 2x - 3}{5 - 3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4}\right)^3$

g) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2}\right)^2$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 4}}$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x^2 - x + 2}{4x + 3}}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{6 - 4x}$

H.29 Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

Solução

Temos $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2x) = 0$ e nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado.

Os polinômios $(x^2 - 4)$ e $(x^2 - 2x)$ anulam-se para $x = 2$, portanto, pelo teorema de D'Alembert, são divisíveis por $x - 2$, isto é:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}$$

Considerando que no cálculo do limite de uma função, quando x tende a a, interessa o comportamento da função quando x se aproxima de a e não o que ocorre com a função quando $x = a$, concluímos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2}\frac{x + 2}{x} = 2.$$

H.30 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4 - x^2}{2 + x}$

c) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

d) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

e) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2}$

f) $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{6x^2 + 11x + 3}{2x^2 - 5x - 12}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \to -2} \frac{8 + x^3}{4 - x^2}$

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$

H.31 Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solução

Como no cálculo do limite de uma função, quando x tende a a, interessa o comportamento da função quando x se aproxima de a e não o que ocorre com a função quando x = a, temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

H.32 Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

H.33 Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 3 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

Mostre que $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$.

H.34 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}$.

Solução

Temos $\lim_{x \to 1} (2x^3 + x^2 - 4x + 1) = 0$ e $\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) = 0$.

Os polinômios $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$ anulam-se para $x = 1$, portanto, pelo teorema de D'Alembert, são divisíveis por $(x - 1)$, isto é, $x - 1$ é um fator comum em $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$.

Efetuando as divisões de $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$ por $(x - 1)$, obtemos:

$$\frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} = \frac{(x - 1) \cdot (2x^2 + 3x - 1)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 3)} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 3}$$

Então

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 3} = 2$$

H.35 Calcular os limites:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 - x^2 + 2}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 6x - 9}{x^3 - 8x - 3}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 4x^2 + 8x - 5}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2}$

H.36 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

Solução

Temos $\lim_{x \to 1} (3x^3 - 4x^2 - x + 2) = 0$ e $\lim_{x \to 1} (2x^3 - 3x^2 + 1) = 0$.

Efetuando as divisões de $3x^3 - 4x^2 - x + 2$ e $2x^3 - 3x^2 + 1$ por $x - 1$, temos:

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \frac{(x - 1)(3x^2 - x - 2)}{(x - 1)(2x^2 - x - 1)} = \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$$

então

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$$

mas

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - x - 2) = 0 \text{ e } \lim_{x \to 1} (2x^2 - x - 1) = 0$$

então

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(3x + 2)}{(x - 1)(2x + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 2}{2x + 1} = \frac{5}{3}$$

H.37 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4}{2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 12x - 8}$

H.38 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$

b) $\lim\limits_{x \to -a} \dfrac{a^2 - x^2}{a^3 + x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

H.39 Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 2}{x - 3}$

Solução

Como $\lim\limits_{x \to 3} (\sqrt{1 + x} - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) = 0$, não podemos aplicar a propriedade L_7 (limite do quociente). Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do numerador, temos:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2}$$

e, então

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{4}$$

H.40 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x} - \sqrt{x + 1}}{x - 1}$

H.41 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - \sqrt{10 - x}}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 3}}{x^2 - 3x + 2}$

H.42 Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$.

Solução

Como $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{3x - 2} - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{4x + 1} - 3) = 0$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo "conjugado" do numerador e também pelo "conjugado" do denominador.

$$\frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3} = \frac{(\sqrt{3x - 2} - 2) \cdot (\sqrt{3x - 2} + 2) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3)}{(\sqrt{4x + 1} - 3) \cdot (\sqrt{4x + 1} + 3) \cdot (\sqrt{3x - 2} + 2)} =$$

$$= \frac{3(x - 2)(\sqrt{4x + 1} + 3)}{4(x - 2)(\sqrt{3x - 2} + 2)} = \frac{3(\sqrt{4x + 1} + 3)}{4(\sqrt{3x - 2} + 2)}$$

e então

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3} = \lim_{x \to 2} \frac{3(\sqrt{4x + 1} + 3)}{4(\sqrt{3x - 2} + 2)} = \frac{9}{8}$$

H.43 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{4 - \sqrt{10 + x}}{2 - \sqrt{10 - x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x + 4}}{\sqrt{x + 1} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 2}}{\sqrt{x + 2} - 2}$

H.44 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x - 1} - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 4x + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2}$

H.45 Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt[3]{3x - 5} - 1}$.

Solução

Notemos $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt[3]{3x - 5} - 1) = 0$.

Lembrando da identidade $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, vamos multiplicar o numerador e o denominador por $[(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1]$.

$$\frac{x - 2}{\sqrt[3]{3x - 5} - 1} = \frac{(x - 2)[(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1]}{(\sqrt[3]{3x - 5} - 1)[(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1]} =$$

$$= \frac{(x - 2)[(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1]}{3(x - 2)} = \frac{(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1}{3}$$

e então

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{3x - 5} - 1} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt[3]{3x - 5})^2 + \sqrt[3]{3x - 5} + 1}{3} = 1$$

H.46 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{2x + 3} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 - 2x + x^2} - 2}{x - x^2}$

H.47 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{1 + \sqrt[3]{3x - 1}}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{2 - 3x} - 2}{1 + \sqrt[3]{2x + 3}}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2 - 7x + 1} + 1}{\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} - 1}$

H.48 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x + 4} - 3}{\sqrt[3]{x - 2} + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x - 2} - 2}{\sqrt{x - 1} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x^3 - 5x + 6} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1} + 1}$

H.49 Calcular $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$.

Solução

Notemos que $\lim\limits_{x \to 64} (\sqrt{x} - 8) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 64} (\sqrt[3]{x} - 4) = 0$

Poderíamos empregar no cálculo deste limite os processos mencionados nos exercícios H.39 e H.45: Vamos, entretanto, apresentar um novo processo. Fazendo $\sqrt[6]{x} = y$, temos $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3 = y^3$ e $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2 = y^2$

e notando que $\lim\limits_{x \to 64} \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{\lim\limits_{x \to 64} x} = \sqrt[6]{64} = 2 = \lim\limits_{y \to 2} y$

temos:

$$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{y \to 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \to 2} \frac{y^2 + 2y + 4}{y + 2} = 3$$

H.50 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

H.51 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$

40. Lembremos que ao considerarmos $\lim_{x \to a} f(x)$, estávamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de *a*, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo *a* mas diferentes de *a* e portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a.

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de *a*, mas assume valores menores que *a*, é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de *a*, mas assume valores maiores que *a*.

Assim, por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, (à esquerda de 1), temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	4	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, (à direita de 1), temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	0	-0,5	-0,75	-0,9	-0,99	-0,999

Observamos que, se está próximo de 1, à esquerda de 1, então os valores da função estão próximos de 3, e se x está próximo de 1, à direita, então os valores da função estão próximos de -1.

Em casos como este, onde supomos x assumindo valores próximos de 1, mas somente a esquerda ou somente a direita de 1, consideramos os limites laterais pela esquerda ou pela direita de 1, que definiremos a seguir.

41. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto]a, b[. O limite de f(x), quando x se aproxima de *a* pela direita, será L e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

42. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto]b, a[. O limite de f(x), quando x se aproxima de *a* pela esquerda, será L e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

43. As propriedades de limites (propriedades L) e o teorema do limite da função polinomial são válidos se substituirmos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou por "$x \to a^-$".

Exemplos

Na função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 4) = -3$$

Como os limites laterais são diferentes, dizemos que $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe. A justificação da não existência de um limite devido ao fato de os limites laterais serem diferentes é dada no teorema que segue.

44. Teorema

Seja I um intervalo aberto contendo a e seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L.

Demonstração

Notando que

$$0 < |x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < 0 \text{ ou } 0 < x - a < \delta$$

temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon) \iff$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \text{ ou } 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon) \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon \\ \text{e} \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \end{array} \right\} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to a^-} f(x) = L \\ \text{e} \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L \end{array} \right.$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios H.52 a H.57, é dada uma função f. Calcule os limites indicados, se existirem; se o(s) limite(s) não existir(em) especificar a razão.

H.52 $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 4x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

H.53 $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{se } x \geqslant -1 \\ 4 - x & \text{se } x < -1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

H.54 $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x \geqslant 3 \\ 4 - 5x & \text{se } x < 3 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

H.55 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

H.56 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - 2x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

H.57 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 6x - 7 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

H.58 Dada a função f definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, calcule $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?

Solução

Lembrando que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Considerando que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ concluímos que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Nos exercícios H.59 a H.64 é dada uma função f. Calcule os limites indicados se existirem.

H.59 $f(x) = \dfrac{|x + 1|}{x + 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{-1\}$.

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

H.60 $f(x) = \dfrac{|3x - 2|}{2 - 3x}$ definida em $\mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}$.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f(x)$

H.61 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

H.62 $f(x) = \dfrac{|3x^2 - 5x - 2|}{x - 2}$ definida em $\mathbb{R} - \{2\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

H.63 $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{|x - 2|}$ definida em $\mathbb{R} - \{2\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

H.64 $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{|2x^2 - 9x + 10|}$ definida em $\mathbb{R} - \{2, \frac{5}{2}\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

H.65 Dada a função máximo inteiro(*), denotada por $f(x) = [x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$, calcule se existir.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} [x]$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} [x]$

c) $\lim\limits_{x \to 1} [x]$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - [x])$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - [x])$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (x - [x])$

g) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x + [x])$

h) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x + [x])$

i) $\lim\limits_{x \to 1} (x + [x])$

H.66 Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \\ 5 - ax & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

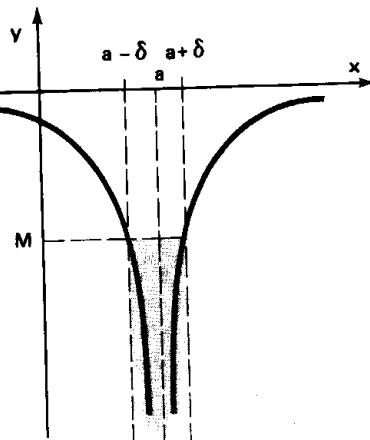
H.67 Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x \leqslant -2 \\ 3x + a & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

H.68 Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ 3 - ax - x^2 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

(*) A função máximo inteiro é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = [x] = n$ tal que $n \leqslant x < n + 1$.

48. Definição

Seja I um intervalo aberto que contém a. Seja f uma função definida em I − {a}. Dizemos que quando *x* se aproxima de *a*, f(x) decresce ilimitadamente e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se, para qualquer número $M < 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < M$.

Em símbolos, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < M)$$

Insistimos novamente em observar que o símbolo "$-\infty$" não representa nenhum número real, mas indica o que ocorre com a função quando *x* se aproxima de *a*.

49. Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	−1	−2	−4	−10	−100	−1000

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	1	2	4	10	100	1000

Observemos que se x assume valores próximos de 1, à esquerda de 1, os valores da função decrescem ilimitadamente e se x assume valores próximos de 1, à direita de 1, então os valores da função crescem ilimitadamente. Estamos considerando os limites laterais que são "infinitos" e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

50. Definição

Seja I um intervalo aberto que contém *a* e seja f uma função definida em I − {a}. Dizemos que, quando *x* se aproxima de *a* por valores maiores que a, f(x) cresce ilimitadamente e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

se, qualquer que seja o número $M > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > M$.

Em símbolos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

Coloquemos com símbolos as definições de $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies f(x) < M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists\, \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists\, \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies f(x) < M)$$

Para concluirmos que os valores de uma função cresciam infinitamente ou decresciam infinitamente, quando x se aproximava de a, pela esquerda ou pela direita de a, construímos uma tabela de valores da função quando x estava próximo de a. Vejamos como chegar à mesma conclusão sem construirmos essa tabela.

51. Teorema

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = c \neq 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ então:

I) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a;

II) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ quando x está próximo de a;

Demonstração

Faremos a demonstração de I e deixaremos a prova de II, que é feita de modo análogo, a cargo do leitor. Para demonstrar que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ devemos mostrar

$$\forall M > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

Vamos considerar dois casos:

1º caso: Supondo $c > 0$

Por hipótese temos $\lim_{x \to a} f(x) = c > 0$, isto é:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = \frac{c}{2}$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - c| < \frac{c}{2}$$

ou seja

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow -\frac{c}{2} < f(x) - c < \frac{c}{2}$$

ou ainda

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow \frac{c}{2} < f(x) < \frac{3c}{2}$$

Assim, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow f(x) > \frac{c}{2} > 0 \qquad (1)$$

isto é, $f(x) > 0$ quando x está próximo de a.

Mas, por hipótese, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a, então $g(x) > 0$ quando x está próximo de a.

Pela definição de $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x)| < \epsilon$$

mas, $|g(x)| = g(x)$ já que $g(x) > 0$ quando x está próximo de a, então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow g(x) < \epsilon \qquad (2)$$

Com base nas afirmações (1) e (2), podemos concluir que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{2\epsilon}$$

Assim, dado $M > 0$, seja $\epsilon = \frac{c}{2M}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ onde δ_1 e δ_2 são números positivos que satisfazem (1) e (2) respectivamente, então: dado $M > 0$, $\exists\, \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{2\epsilon} = \frac{c}{\frac{2c}{2M}} = M$$

o que prova que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

2º caso: Supondo $c < 0$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = c < 0$ então $\lim_{x \to a} [-f(x)] = -c > 0$ e se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a, então $\frac{-f(x)}{-g(x)} > 0$ quando x está próximo de a.

Considerando as funções h e j tais que $h(x) = -f(x)$ para todo x do domínio de f e $j(x) = -g(x)$ para todo x do domínio de g, temos pelo primeiro caso já demonstrado

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{j(x)} = +\infty$$

mas $\dfrac{h(x)}{j(x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Observação: este teorema continua válido se "$x \to a$" for substituido por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

EXERCÍCIOS

H.69 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$

Solução

a) Como $\lim\limits_{x \to 1} (3x+2) = 5$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x-1)^2 = 0$, estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$ quando x está próximo de 1.

		-2/3		1	x
sinal de $f(x) = 3x + 2$	−	0	+		+
sinal de $g(x) = (x-1)^2$	+		+	0	+
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$	−	0	+		+

Notemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x+2}{(x-1)^2} > 0$ quando x está próximo de 1, então:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{(x-1)^2} = +\infty$$

b) Como $\lim\limits_{x \to 2} (1-x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$, estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$ quando x está próximo de 2.

		1		2	x
sinal de $f(x) = 1 - x$	+	0	−		−
sinal de $g(x) = (x-2)^2$	+		+	0	+
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$	+	0	−		−

Notemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1-x}{(x-2)^2} < 0$ quando x está próximo de 2, então

$$\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$$

H.70 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-4}{(x-2)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-3x}{(x-1)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x+2}{|x+1|}$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2+5x-3}{|x+2|}$

H.71 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$

Solução:

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x+1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$, estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x+1}{x-1}$ quando x está próximo de 1.

		-1/2		1	x
sinal de $f(x) = 2x + 1$	−	0	+		+
sinal de $g(x) = x - 1$	−		−	0	+
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x+1}{x-1}$	+	0	−		+

Notemos que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x - 1} < 0$ quando x está próximo de 1, à esquerda, então

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty$$

e $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x - 1} > 0$ quando x está próximo de 1, à direita, então

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$$

Observemos que não tem significado falarmos em $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x + 1}{x - 1}$ pois $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$.

H.72 Determine:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x + 4}{x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x + 4}{x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1 - 2x}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1 - 2x}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} \frac{3x + 2}{5 - 2x}$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^+} \frac{3x + 2}{5 - 2x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x + 3}{(x - 1)^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x + 3}{(x - 1)^3}$

i) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3}$

j) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3}$

H.73 Mostre pela definição que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

H.74 Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

II. PROPRIEDADES DOS LIMITES INFINITOS

Veremos a seguir dez teoremas cujos enunciados serão apresentados com o símbolo "$x \to a$", mas que serão válidos se trocarmos esse símbolo por "$x \to a^-$" ou "$x \to a^+$".

52. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$ devemos provar

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow (f + g)(x) > M$$

mas $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, isto é, se tomarmos $\frac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow f(x) > \frac{M}{2}$$

e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, isto é, se tomarmos $\frac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow g(x) > \frac{M}{2}$$

então considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

53. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$. A demonstração deste teorema é feita de modo análogo ao teorema anterior; deixaremos a cargo do leitor.

54. Observação

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} i(x) = -\infty$ não podemos estabelecer uma lei geral para os seguintes limites:

$\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x)$, $\lim\limits_{x \to a} (h - i)(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} (f + h)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x^4}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$ definidas para todo x real e $x \neq 0$. Observemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

e calculemos

$$\lim_{x \to 0} (f - g)(x) = \lim_{x \to 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^4}\right) = -\infty.$$

Se considerarmos as funções

$f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ e $g(x) = \dfrac{3}{x^3 - 1}$ definidas em $\mathbb{R} - \{1\}$ teríamos

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{x^3 - 1} = +\infty$$

Mas

$$\lim_{x \to 1^+} (f - g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = 1$$

55. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$ então

I) se $b > 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

II) se $b < 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

Demonstração

Faremos apenas a demonstração de I.

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b > 0$, então existem $\alpha > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $g(x) > \alpha$.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então existem $\frac{M}{\alpha} > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $f(x) > \frac{M}{\alpha}$.

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) > \frac{M}{\alpha} \cdot \alpha = M$.

56. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$, então:

I) se $b > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

II) se $b < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

A demonstração deste teorema ficará como exercício.

57. Observação

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, onde g não é a função nula, não podemos formular uma lei geral para $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ e $f_2(x) = \frac{1}{x^4}$ definidas em $\mathbb{R}^*$ e as funções $g_1(x) = x^4$ e $g_2(x) = x^2$ definidas em $\mathbb{R}$.

Observemos que

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} f_2(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0} g_1(x) = \lim_{x \to 0} x^4 = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0} g_2(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Mas

$$\lim_{x \to 0} (f_1 \cdot g_1)(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x^4\right) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad e$$

$$\lim_{x \to 0} (f_2 \cdot g_2)(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^4} \cdot x^2\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

58. Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, então existem $\sqrt{M} > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $f(x) > \sqrt{M}$; e se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então existem $\sqrt{M} > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $g(x) > \sqrt{M}$.

Considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) \cdot g(x) > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M$.

59. Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

A demonstração deste teorema é feita de modo análogo à do teorema anterior, portanto, ficará como exercício.

60. Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Demonstrar este teorema a título de exercício.

61. Observação

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) então não podemos estabelecer uma lei geral para $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$ e $h(x) = -\frac{1}{x^2}$ definidas em $\mathbb{R}^*$.

Observemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}} \right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (\frac{g}{h})(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} (\frac{h}{f})(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to 0} (-1) = -1$$

62. Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Demonstração

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, então existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$.

Mas

$$f(x) > M > 0 \iff |f(x)| > M \iff \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{M}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| < \epsilon$ e, portanto, $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

63. Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

A demonstração ficará a cargo do leitor

64. Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty$.

Demonstração

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x)| < \epsilon$.

Mas

$$|f(x)| < \epsilon \iff \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\epsilon}$$

Tomando $M = \frac{1}{\epsilon}$, temos para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$ e, portanto, $\lim_{x \to a} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty$.

65. Observação

Se existir δ tal que para todo x que satisfaça $0 < |x - a| < \delta$ tenhamos $f(x) > 0$, então $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to a} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty$.

Se existir δ tal que para todo x que satisfaça $0 < |x - a| < \delta$ tenhamos $f(x) < 0$, então

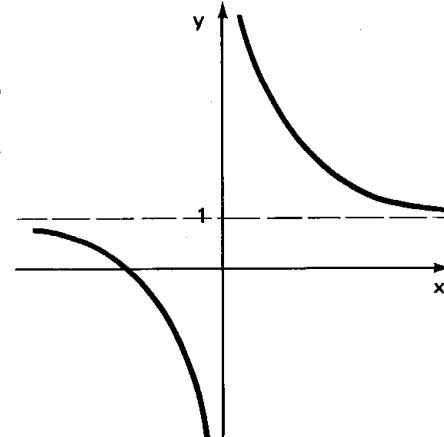
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to a} - \left| \frac{1}{f(x)} \right| = -\infty$$

66. Antes de prosseguirmos, façamos um resumo dos teoremas apresentados, lembrando que as proposições permanecerão válidas se substituirmos o símbolo "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Dados		Conclusão
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$		$\lim_{x \to a} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty$

Não poderemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

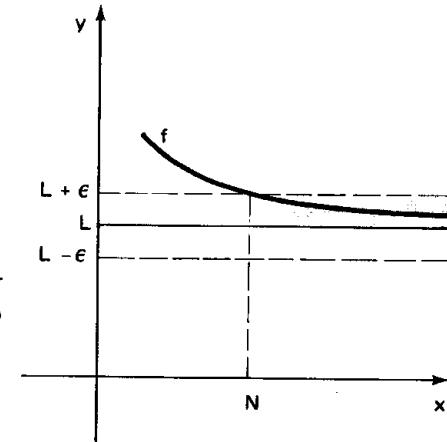
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = ?$
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ (ou $+\infty$)	$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = ?$

III. LIMITES NO INFINITO

67. Seja a função f definida por $f(x) = \frac{x+2}{x}$ para todo x real e $x \neq 0$. Atribuindo a x os valores 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente, temos:

x	1	5	10	100	1000	10000
f(x)	3	1,4	1,2	1,02	1,002	1,0002

Observamos que, à medida que x cresce através de valores positivos, os valores da função f se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar f(x) tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos para x valores cada vez maiores.

Escrevemos, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

68. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, f(x) se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

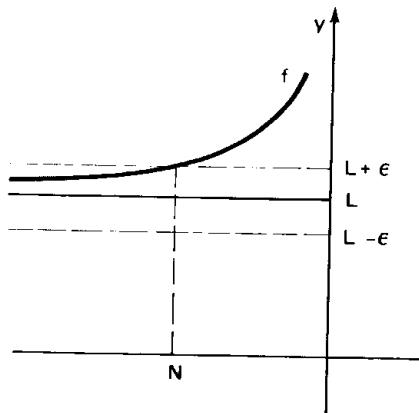
se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

69. Consideremos novamente a função $f(x) = \frac{x+2}{x}$. Atribuindo a x os valores −1, −5, −10, −100, −1000, −10000 e assim por diante, de tal forma que x decresça ilimitadamente, temos:

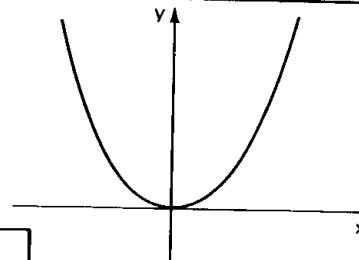
x	-1	-5	-10	-100	-1000	-10000
f(x)	-1	0,6	0,8	0,98	0,998	0,9998

Observamos que, à medida que x decresce através de valores negativos, os valores da função se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar f(x) tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos a x valores cada vez menores. Escrevemos, então:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

70. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, f(x) aproxima-se de L e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists\, N < 0 \mid x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

71. Seja a função $f(x) = x^2$, definida para todo x real.

Atribuindo a x os valores 1, 5, 10, 100, 1000 e assim sucessivamente, de tal forma que x cresça ilimitadamente, temos:

x	1	5	10	100	1000
f(x)	1	25	100	10000	1000000

Observamos que, a medida que x cresce através de valores positivos, os valores da função também crescem e ilimitadamente. Em outras palavras, dizemos que podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores suficientemente grandes e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

72. Se agora atribuirmos a x os valores −1, −5, −10, −100, −1000 e assim sucessivamente, de tal forma que x decresça ilimitadamente, temos:

x	−1	−5	−10	−100	−1000
f(x)	1	25	100	10000	1000000

Observamos que, a medida que x decresce através de valores negativos, os valores da função crescem e ilimitadamente. Em outras palavras, dizemos que podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores negativos cujos módulos sejam suficientemente grandes e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

73. Definições

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, f(x) cresce também ilimitadamente e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se, para qualquer número $M > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $f(x) > M$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists\, N > 0 \mid x > N \implies f(x) > M)$$

Coloquemos com símbolos as definições de

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists\, N > 0 \mid x > N \implies f(x) < M)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists\, N < 0 \mid x < N \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists\, N < 0 \mid x < N \implies f(x) < M)$$

Para concluirmos algo com relação ao comportamento dos valores da função quando x crescia ou decrescia ilimitadamente, construímos uma tabela de valores de x e f(x). Vejamos como chegar à mesma conclusão, sem construirmos essa tabela.

74. Teorema

Se $c \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} c = \lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

Demonstração

A demonstração é bastante simples, já que

$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies 0 = |c - c| < \epsilon$

é trivialmente verdadeira e portanto

$\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$

75. Teorema

Se n é um número inteiro e positivo então

I) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Demonstração

Faremos a demonstração de II por indução sobre n.

1º caso: *n é ímpar*

A proposição é verdadeira para $n = 1$ pois $(\forall M < 0, \exists M < 0 \mid x < M \implies$ $\Rightarrow x < M) \implies \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Supondo que a proposição seja verdadeira para $n = p$ mostremos que é verdadeira para $n = p + 2$, isto é, se $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$ então $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{p+2} = -\infty$.

De fato, por aplicações sucessivas dos teoremas já vistos, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} x^{p+2} = \lim_{x \to -\infty} (x^p \cdot x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^p \cdot \lim_{x \to -\infty} x^2$$

Mas $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$ portanto,

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^{p+2} = -\infty$.

As demonstrações para o caso em que n é par e da parte I ficam como exercícios.

76. Teorema

Se n é um número inteiro positivo, então:

I) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Demonstração

Fica como exercício

77. Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (a_n x^n)$$

Demonstração

Por aplicações sucessivas das propriedades e teoremas, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \ldots + 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n) \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \ldots + 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n)$$

pois

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \ldots + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a_0}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} + \lim_{x \to +\infty} \frac{a_1}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} + \lim_{x \to +\infty} \frac{a_2}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-2}} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

78. Teorema

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, $b_m \neq 0$ são funções polinomiais então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right)$$

Demonstração

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots + 1\right)}{b_mx^m \left(\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \ldots + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right) \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots + 1}{\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \ldots + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}\right) \cdot 1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right)$$

EXERCÍCIOS

H.75 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2 - 7x + 3)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$

Solução:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2 - 7x + 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3x^4) = +\infty$

H.76 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x + 3)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4 - 5x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^2 - 4x + 3)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (4 - x^2)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3 - 4)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (8 - x^3)$

H.77 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (c \cdot x)$, $c \in \mathbb{R}^*$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x}{c})$, $c \in \mathbb{R}^*$

H.78 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

H.79 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x + 2}{5x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5 - 4x}{2x - 3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 4x + 3}{3x + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$

Solução:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x + 2}{5x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{5x} = \lim\limits_{x+\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5 - 4x}{2x - 3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2) = -2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 4x + 3}{3x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x - 1}{3x^2 + 5x - 2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{3x} = 0$

H.80 Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 - 2x}{5x + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x - 3}{3x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{3x^3 + 5x^2 - 6x + 2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 4}{8x^3 - 1}$

g) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3 - x^3}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(2x-3)^3}{x(x+1)(x+2)}$

i) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+2)^3}{2x(3x+1)(4x-1)}$

j) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5}$

k) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{(x+2)^4 - (x-1)^4}{(2x+3)^3}$

H.81 Encontre:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1}$

Solução

Observemos que

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$,

$\lim_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ e não têm significado os símbolos $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

Notemos que

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x + 1} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

portanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

H.82 Encontre:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1 + x\sqrt{x}}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$

g) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1000}}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$

H.83 Encontre

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$

Solução

Observemos que

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$, mas, carece de significado o símbolo $(+\infty) - (+\infty)$.

Para obtermos o limite procurado, multiplicamos e dividimos $(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$ por $(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)$. Assim, temos:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} =$$

$$= \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x}$$

Notemos que $\lim_{x \to +\infty} (3x + 2) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x) = +\infty$ e o símbolo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ não tem significado. Fazemos então

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x = \frac{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

portanto

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{3}{2}$$

H.84 Encontre:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x)$

b) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 2})$

d) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$

e) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

f) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 3x + 4})$

g) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$

h) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - x)$

H.85 Encontre:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 - 2}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 3}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$

H.86 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x+1}}$

H.87 Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

H.88 Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

IV. PROPRIEDADES DOS LIMITES NO INFINITO

Veremos em seguida dez teoremas cujos enunciados serão apresentados com o símbolo "$x \to +\infty$" e não perdem a validade se esse símbolo for trocado por "$x \to -\infty$". Estes teoremas são basicamente os apresentados nas *propriedades dos limites infinitos,* com adaptações para aplicações de limites no infinito.

79. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$ devemos provar:

$$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies (f + g)(x) > M$$

Temos, por hipótese

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, isto é, se tomarmos $\dfrac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \exists N_1 > 0 \mid x > N_1 \implies f(x) > \frac{M}{2}$$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, isto é, se tomarmos $\dfrac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \exists N_2 > 0 \mid x > N_2 \implies g(x) > \frac{M}{2}$$

então considerando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos:

$$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

Faremos a apresentação dos enunciados dos demais teoremas e deixaremos a cargo do aluno as demonstrações.

80. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g) = -\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$, não podemos estabelecer uma lei geral para os seguintes limites

$$\lim_{x \to +\infty} (f - g), \quad \lim_{x \to +\infty} (h - i)(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (f + h)(x)$$

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 3x + 5$ definidas para todo x real. Observemos que

$$\lim_{x \to +\infty} (3x - 2) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (3x + 5) = +\infty$$

e calculemos

$$\lim_{x \to +\infty} (f - g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [(3x - 2) - (3x + 5)] = \lim_{x \to +\infty} (-7) = -7$$

Se considerarmos as funções $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$ definidas para todo x real, teríamos:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 7x + 1) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (2x^2 + 2x - 3) = +\infty$$

mas $\lim\limits_{x \to +\infty} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] =$

$$= \lim_{x \to +\infty} [(3x^2 - 7x + 1) - (2x^2 + 2x - 3)] = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 9x + 4) = +\infty$$

81. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$, então

I) se $b > 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$

II) se $b < 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

82. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$, então

I) se $b > 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$

II) se $b < 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

onde g não é a função nula, então não podemos formular uma lei geral para $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x)$.

Por exemplo consideremos as funções $f(x) = 2x + 1$ e $h(x) = x^2 - 4$ definidas em $\mathbb{R}$ e a função $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

Observemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

mas

$$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} (h \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [h(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = +\infty$$

83. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

84. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

85. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) não podemos estabelecer uma lei geral para $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{f}{g})(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 3x - 4$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$ definidas em $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$$

mas

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{3x - 4} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{h}{g})(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x - 4} = +\infty$$

86. Teorema

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

87. Teorema

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

88. Teorema

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Observação

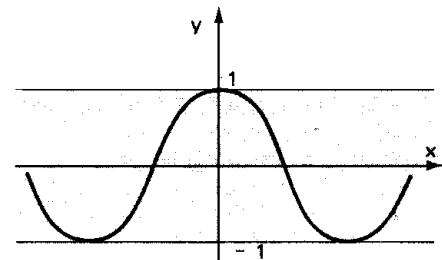
Se existir $N > 0$ tal que para todo $x > N$ tenhamos $f(x) > 0$, então:

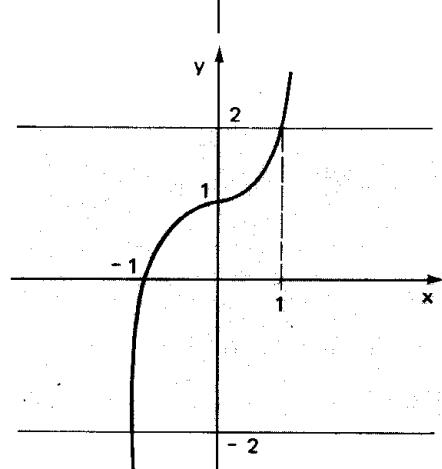
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

ou se existir $N > 0$ tal que para todo $x > N$ tenhamos $f(x) < 0$, então:

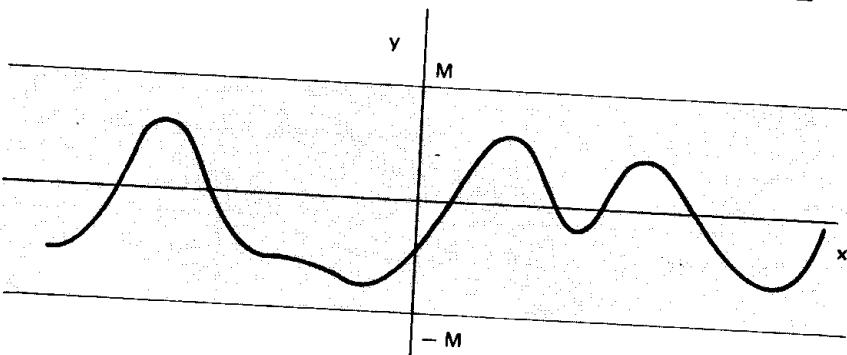
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} - \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

89. Resumo

Faremos agora um resumo dos teoremas apresentados, lembrando que as proposições continuam verdadeiras se trocarmos o símbolo "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$".

Dados		Conclusão
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to -\infty} (f+g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$		$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$		$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$		$\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty$

Não podemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f-g)(x) = ?$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f-g)(x) = ?$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = ?$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$	$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = ?$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim_{x \to +\infty} (\frac{f}{g})(x) = ?$

CAPÍTULO IV
COMPLEMENTOS SOBRE LIMITES

I. TEOREMAS ADICIONAIS SOBRE LIMITES

90. Função limitada

Definição

Dizemos que uma função f, definida em A, é limitada em $B \subset A$ se existir um número $M > 0$ tal que, para todo x pertencente a B, temos $|f(x)| < M$, isto é, $-M < f(x) < M$.

Em símbolos:

$$f \text{ é limitada em } B \iff (\exists M > 0 \mid x \in B \Longrightarrow |f(x)| < M)$$

Decorre da definição que, se f é limitada em B, então existem a e b reais tais que, para todo $x \in B$, vale $a < f(x) < b$.

Exemplos

1º) A função $f(x) = \cos x$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2º) A função $f(x) = x^3 + 1$ não é limitada em $\mathbb{R}$ mas é limitada no intervalo $[-1, 1]$ pois

$-2 \leqslant x^3 + 1 \leqslant 2$ para todo $x \in [-1, 1]$

91. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, então existe um intervalo aberto I contendo *a*, tal que f é limitada em $I - \{a\}$.

Demonstração

Devemos provar que se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ então existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| < M$.

De fato, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, temos:

$$\epsilon = 1, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < 1$$

mas

$$|f(x) - b| \geqslant |f(x)| - |b|$$

portanto

$$|f(x) - b| < 1 \Longrightarrow |f(x)| - |b| \leqslant 1 \Longrightarrow |f(x)| \leqslant |b| + 1$$

pondo $M = |b| + 1$, temos

$$\exists\, M > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M$$

92. Teorema da conservação do sinal

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ então existe um intervalo aberto I contendo a, tal que f conserva o mesmo sinal de b em $I - \{a\}$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, tomando $\epsilon = \frac{|b|}{2}$ na definição de limites, temos:

$$\epsilon = \frac{|b|}{2}, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\implies b - \frac{|b|}{2} < f(x) < b + \frac{|b|}{2}$$

Se $b > 0$, então, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$f(x) > b - \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies f \text{ tem o mesmo sinal de } b.$$

Se $b < 0$, então, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$ temos

$$f(x) < b + \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} < 0 \implies f \text{ tem o mesmo sinal de } b.$$

93. Teorema do confronto

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ e se f é tal que $g(x) < f(x) < h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, onde I é intervalo aberto que contém a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ então, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < g(x) < b + \epsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < h(x) < b + \epsilon$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies b - \epsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < b + \epsilon \implies$$

$$\implies b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

isto é

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

"Se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = b$ e se f é tal que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in]a, +\infty[$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$".

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = b$, então para todo $\epsilon > 0$, existem $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ tais que

$$x > N_1 \implies |g(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < g(x) < b + \epsilon$$

$$x > N_2 \implies |h(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < h(x) < b + \epsilon$$

Sendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies b - \epsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < b + \epsilon \implies$$

$$\implies b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

isto é, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Obs: O teorema continua válido se substituirmos "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$" e $]a, +\infty[$ por $]-\infty, a[$.

94. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, com $b < c$, então existe um intervalo aberto I contendo a, tal que $f(x) < g(x)$ em $I - \{a\}$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ e tomando $\epsilon = \frac{c - b}{2}$ na definição de limites, temos que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - b| < \frac{c - b}{2} \implies \frac{3b - c}{2} < f(x) < \frac{b + c}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \frac{c - b}{2} \implies \frac{b + c}{2} < g(x) < \frac{3c - b}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < \frac{b + c}{2} < g(x) \implies$$

$$\implies f(x) < g(x)$$

II. LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

95. Teorema

$$\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$ demonstremos que

$\lim\limits_{x \to a} (\text{sen } x - \text{sen } a) = 0$, já que $\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a \iff \lim\limits_{x \to a} (\text{sen } x - \text{sen } a) = 0$.

Temos, da trigonometria,

$$0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| = \left|2 \text{ sen } \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}\right| = \left|2 \cos \frac{x + a}{2}\right| \cdot \left|\text{sen } \frac{x - a}{2}\right|$$

mas $\left|\text{sen } \frac{x - a}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x - a}{2}\right|$ e $\left|2 \cos \frac{x + a}{2}\right| \leqslant 2$

então

$$0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| \leqslant 2 \left|\frac{x - a}{2}\right| \implies 0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| \leqslant |x - a|$$

Considerando as funções $g(x) = 0$, $f(x) = |\text{sen } x - \text{sen } a|$ e $h(x) = |x - a|$ e notando que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} |x - a| = 0$$

Segue-se pelo teorema do confronto que $\lim\limits_{x \to a} |\text{sen } x - \text{sen } a| = 0$ e, portanto,

$\lim\limits_{x \to a} |\text{sen } x - \text{sen } a| = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$.

96. Teorema

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

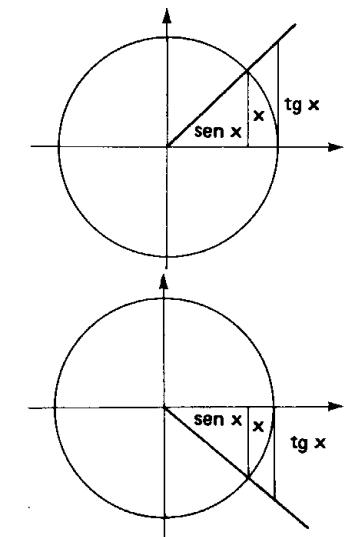
A demonstração deste teorema, que é feita de modo análogo à do anterior, ficará como exercício.

97. Teorema

$$\lim_{x \to a} \text{tg } x = \text{tg } a, \ \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração

$$\lim_{x \to a} \text{tg } x = \lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x}{\lim\limits_{x \to a} \cos x} = \frac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a$$

98. Teorema (limite trigonométrico fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Demonstração

Da trigonometria, temos

a) $0 < x < \frac{\pi}{2} \implies \text{sen } x < x < \text{tg } x \implies$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\text{tg } x} \qquad \text{(I)}$$

b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \implies \text{sen } x > x > \text{tg } x \implies$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\text{tg } x} \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando as desigualdades (I) e (II) por sen x, resulta

a) $0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(\text{sen } x > 0)} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \Longrightarrow$

$\Rightarrow 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$

b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \xrightarrow{(\text{sen } x < 0)} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \Longrightarrow$

$\Rightarrow 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$

Temos, portanto:

para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$ $\quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$

Considerando $g(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ e $h(x) = 1$ e notando que

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

pelo teorema do confronto, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

EXERCÍCIOS

H.89 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Solução

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (2 \cdot \frac{\text{sen } 2x}{2x}) = 2 \cdot 1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x} = \lim\limits_{x \to 0} (\frac{3}{5} \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\text{sen } 5x}) = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} (\frac{(\text{sen } x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}) = \frac{1}{2}$

H.90 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{bx}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x}{3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg } ax}{bx}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sec x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg } x + \text{sen } x}{x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \text{sen } x}$

H.91 Encontre:

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$

Solução

Da trigonometria, temos:

$\text{sen } x - \text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}$

então

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2 \text{ sen } \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{\text{sen } \frac{x - a}{2}}{\frac{x - a}{2}} \cdot \cos \frac{x + a}{2} \right) = 1 \cdot \cos a = \cos a$$

H.92 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\text{tg } x - \text{tg } a}{x - a}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x - \cos x}{1 - \text{tg } x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{\text{sen}^2 x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 3x - \text{sen } 2x}{\text{sen } x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x + a) - \text{sen } a}{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x + a) - \cos a}{x}$

j) $\lim_{x\to \pi} \frac{1 - \text{sen } \frac{x}{2}}{\pi - x}$

k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$

l) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{\text{sen } \pi x}$

m) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \text{sen } x}$

n) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\text{sen}^2 x}$

o) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } ax - \text{sen } bx}{x}$

p) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}$

q) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen } 2x}{x + \text{sen } 3x}$

r) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

s) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$

t) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \text{sen } x} - \sqrt{1 - \text{sen } x}}{x}$

H.93 Encontre:

a) $\lim_{x\to 0} x \cdot \text{sen } \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x\to 1} (1 - x) \cdot \text{tg } \frac{\pi x}{2}$

b) $\lim_{x\to +\infty} x \cdot \text{sen } \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \text{cotg } 2x \cdot \text{cotg } (\frac{\pi}{2} - x)$

III. LIMITES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

99. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ devemos provar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x| < \delta \implies |a^x - 1| < \epsilon$$

Supondo $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$ temos:

$$|a^x - 1| < \epsilon \iff -\epsilon < a^x - 1 < \epsilon \iff 1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon \iff$$
$$\iff \log_a (1 - \epsilon) < x < \log_a (1 + \epsilon)$$

mas se $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$, então $\log_a (1 - \epsilon) < 0$ e $\log_a (1 + \epsilon) > 0$ e, portanto:

$$\log_a (1 - \epsilon) < x < \log_a (1 + \epsilon) \iff x < \log_a (1 + \epsilon) \text{ e } -x < -\log_a (1 - \epsilon) \iff$$
$$\iff |x| < \log_a (1 + \epsilon) \text{ e } |x| < -\log_a (1 - \epsilon).$$

Assim, para todo $0 < \epsilon < 1$, existe $\delta = \min \{\log_a (1 + \epsilon), -\log_a (1 - \epsilon)\}$ tal que $0 < |x| < \delta \implies |a^x - 1| < \epsilon$.

Se $a > 1$ e $\epsilon \geq 1$, tomamos $\epsilon' < 1 \leq \epsilon$ e determinamos $\delta' = \min \{\log_a (1 + \epsilon'), -\log_a (1 - \epsilon')\}$ tal que $0 < |x| < \delta' \implies |a^x - 1| < \epsilon' < \epsilon$

Deixaremos a carga do leitor a demonstração para o caso $0 < a < 1$.

100. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x\to b} a^x = a^b$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim_{x\to b} a^x = a^b$ provemos que $\lim_{x\to b} (a^x - a^b) = 0$.

Provemos inicialmente que $\lim_{x\to b} a^{x-b} = 1$ isto é:

$$\forall \epsilon > 0, \delta > 0 \mid 0 < |x - b| < \delta \implies |a^{x-b} - 1| < \epsilon$$

Fazendo $x - b = w$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \delta > 0 \mid 0 < |w| < \delta \implies |a^w - 1| < \epsilon$$

que é verdadeiro pelo teorema anterior.

Mostremos agora que $\lim_{x\to b} (a^x - a^b) = 0$. De fato:

$$\lim_{x\to b} (a^x - a^b) = \lim_{x\to b} [a^b \cdot (a^{x-b} - 1)] =$$
$$= a^b \cdot \lim_{x\to b} (a^{x-b} - 1) = a^b \cdot [\lim_{x\to b} a^{x-b} - 1] = a^b \cdot [1 - 1] = a^b \cdot 0 = 0$$

101. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ devemos provar

$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies a^x > M$

Notemos que para todo $M > 0$ temos $a^x > M \iff x > \log_a M$.

Se $M > 1$, tomamos $N = \log_a M > 0$ e temos que, para todo $M > 1$, existe $N = \log_a M > 0$ tal que $x > N \implies a^x > M$.

Se $0 < M < 1$, tomamos $M' > 1 > M$, determinamos $N = \log_a M' > 0$ e temos que, para todo $M < 1$, existe $N = \log_a M' > 0$ tal que $x > N \implies a^x > M$.

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \exists N < 0 \mid x < N \implies |a^x| < \epsilon$

Notemos que

$|a^x| < \epsilon \iff a^x < \epsilon \iff x < \log_a \epsilon$

Se $0 < \epsilon < 1$, tomamos $N = \log_a \epsilon < 0$ tal que $x < N \implies |a^x| < \epsilon$.

Se $\epsilon > 1$, tomamos $\epsilon' < 1 < \epsilon$, determinamos $N = \log_a \epsilon' < 0$ e temos que, para todo $\epsilon > 1$, existe $N = \log_a \epsilon' < 0$ tal que $x < N \implies |a^x| < \epsilon' < \epsilon$.

102. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

A demonstração deste teorema ficará a cargo do leitor como exercício.

103. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = 1$.

Demonstração

Considerando que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$ e supondo $a > 1$, temos:

1) Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$0 < |x - b| < \delta_1 \implies |f(x)| < \log_a(1 + \epsilon_1) \implies$
$\implies -\log_a(1 + \epsilon_1) < f(x) < \log_a(1 + \epsilon_1)$.

2) Dado $0 < \epsilon_2 < 1$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$0 < |x - b| < \delta_2 \implies |f(x)| < -\log_a(1 - \epsilon_2) \implies$
$\implies \log_a(1 - \epsilon_2) < f(x) < -\log_a(1 - \epsilon_2)$

Notemos que, para $\epsilon_1 > 0$ e $0 < \epsilon_2 < 1$, temos:

$\log_a(1 - \epsilon_2) < 0 < \log_a(1 + \epsilon_1)$

Então, para todo $\epsilon > 0$, temos:

1) Se $0 < \epsilon < 1$, então existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$0 < |x - b| < \delta \implies \log_a(1 - \epsilon) < f(x) < \log_a(1 + \epsilon) \implies$
$\implies 1 - \epsilon < a^{f(x)} < 1 + \epsilon \implies -\epsilon < a^{f(x)} - 1 < \epsilon \implies |a^{f(x)} - 1| < \epsilon$

2) Se $\epsilon > 1$, então tomamos $0 < \epsilon' < 1 < \epsilon$ e existe $\delta' > 0$ tal que $0 < |x - b| < \delta' \implies |a^{f(x)} - 1| < \epsilon' < \epsilon$

Assim provamos que $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = 1$ para $a > 1$, deixamos a cargo do leitor a demonstração para $0 < a < 1$, que é feita de modo análogo.

104. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, então

$$\lim_{x \to b} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to b} f(x)} = a^c.$$

Demonstração

Por hipótese, temos $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, isto é, $\lim\limits_{x \to b} [f(x) - c] = 0$.

Pelo teorema anterior

$\lim\limits_{x \to b} [f(x) - c] = 0 \implies \lim\limits_{x \to b} a^{[f(x) - c]} = 1$

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = a^c$ provemos que $\lim\limits_{x \to b} [a^{f(x)} - a^c] = 0$.

Então

$\lim\limits_{x \to b} [a^{f(x)} - a^c] = \lim\limits_{x \to b} a^c \cdot [a^{f(x)-c} - 1] =$

$= a^c \cdot \lim\limits_{x \to b} [a^{f(x)-c} - 1] = a^c \cdot [\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)-c} - 1] =$

$= a^c \cdot (1 - 1) = a^c \cdot 0 = 0$

EXERCÍCIOS

H.94 Complete:

a) $\lim_{x\to 2} 3^x =$

b) $\lim_{x\to -1} (\frac{1}{2})^x =$

c) $\lim_{x\to 2} e^x =$

d) $\lim_{x\to 3} (\frac{1}{e})^x =$

H.95 Complete:

a) $\lim_{x\to +\infty} 2^x =$

b) $\lim_{x\to -\infty} 2^x =$

c) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{3})^x =$

d) $\lim_{x\to -\infty} (\frac{1}{3})^x =$

e) $\lim_{x\to +\infty} e^x =$

f) $\lim_{x\to -\infty} e^x =$

H.96 Complete:

a) $\lim_{x\to 3} 2^{2x^2 - 3x + 1} =$

b) $\lim_{x\to -2} 3^{x^2 + 6x + 2} =$

c) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{3x+2}{x-1}} =$

d) $\lim_{x\to -2} 10^{\frac{4x^2+6x-2}{3x+4}} =$

H.97 Complete:

a) $\lim_{x\to 2} 3^{\frac{x^2-4}{x-2}} =$

b) $\lim_{x\to 1} (\frac{1}{2})^{\frac{1-x^2}{x-1}} =$

c) $\lim_{x\to 1} 2^{\frac{x^3-3x+2}{x^2+x-2}} =$

d) $\lim_{x\to 2} (\frac{1}{3})^{\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}} =$

e) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} =$

f) $\lim_{x\to 4} (\frac{1}{e})^{\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-2}} =$

IV. LIMITES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

105. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x\to 1} (\log_a x) = 0$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim_{x\to 1} (\log_a x) = 0$ devemos provar

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$

Supondo $a > 1$ e $\epsilon > 0$, temos que

$|\log_a x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \log_a x < \epsilon \Leftrightarrow a^{-\epsilon} < x < a^{\epsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{-\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{\epsilon} - 1$ mas $a^{-\epsilon} - 1 < 0$ e $a^{\epsilon} - 1 > 0$, portanto:

$a^{-\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{\epsilon} - 1 \Leftrightarrow x - 1 < a^{\epsilon} - 1$ e $1 - x < 1 - a^{-\epsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 1| < a^{\epsilon} - 1$ e $|x - 1| < 1 - a^{-\epsilon}$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{a^{\epsilon} - 1, 1 - a^{-\epsilon}\}$ tal que

$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$

Supondo $0 < a < 1$ e $\epsilon > 0$, temos que

$|\log_a x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \log_a x < \epsilon \Leftrightarrow a^{\epsilon} < x < a^{-\epsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^{\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{-\epsilon} - 1$ mas $a^{\epsilon} - 1 < 0$ e $a^{-\epsilon} - 1 > 0$, portanto:

$a^{\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{-\epsilon} - 1 \Leftrightarrow x - 1 < a^{-\epsilon} - 1$ e $1 - x < 1 - a^{\epsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 1| < a^{-\epsilon} - 1$ e $|x - 1| < 1 - a^{\epsilon}$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{a^{-\epsilon} - 1, 1 - a^{\epsilon}\}$ tal que

$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$

106. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x\to b} (\log_a x) = \log_a b$ onde $b > 0$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim_{x\to b} (\log_a x) = \log_a b$ provemos que $\lim_{x\to b} (\log_a x - \log_a b) = 0$.

Provemos inicialmente que $\lim_{x\to b} (\log_a \frac{x}{b}) = 0$, isto é

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - b| < \delta \Leftrightarrow |\log_a \frac{x}{b}| < \epsilon$

Fazendo $\frac{x}{b} = w$, isto é, $x = bw$ e notando que

$|x - b| = |bw - b| = |b| \cdot |w - 1|$, temos:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0 \mid 0 < |w - 1| < \frac{\delta}{|b|} = \delta' \implies |\log_a w| < \epsilon$

que é verdadeira pelo teorema anterior.

Mostremos agora que $\lim_{x \to b} (\log_a x - \log_a b) = 0$.

De fato:

$$\lim_{x \to b} (\log_a x - \log_a b) = \lim_{x \to b} (\log_a \frac{x}{b}) = 0.$$

107. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$.

Demonstração

Para provarmos que

$$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$$

devemos provar

$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies \log_a x > M$.

Notemos que, para todo $M > 0$, temos $\log_a x > M \iff x > a^M$.

Assim, tomando $N = a^M$, temos que para todo $M > 0$ existe $N = a^M > 0$ tal que

$$x > N \implies \log_a x > M$$

Para provarmos que $\lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$ devemos provar

$\forall M < 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x < \delta \implies \log_a x < M$

Notemos que

$$\log_a x < M \iff x < a^M$$

Assim, tomando $\delta = a^M$, temos que para todo $M < 0$ existe $\delta = a^M > 0$ tal que

$$0 < x < \delta \implies \log_a x < M$$

108. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$ e

e $\lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$.

A demonstração deste teorema, que é feita de modo análogo à do anterior, ficará a cargo do leitor.

109. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = 1$, então $\lim_{x \to b} [\log_a f(x)] = 0$.

Demonstração

Considerando que $\lim_{x \to b} f(x) = 1$ e $a > 1$, temos:

1) Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que

$0 < |x - b| < \delta_1 \implies |f(x) - 1| < a^{\epsilon_1} - 1 \implies$
$\Rightarrow 1 - a^{\epsilon_1} < f(x) - 1 < a^{\epsilon_1} - 1 \implies 2 - a^{\epsilon_1} < f(x) < a^{\epsilon_1}$

2) Dado $\epsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$, tal que

$0 < |x - b| < \delta_2 \implies |f(x) - 1| < 1 - a^{-\epsilon_2} \Rightarrow a^{-\epsilon_2} - 1 <$
$< f(x) - 1 < 1 - a^{-\epsilon_2} \Rightarrow a^{-\epsilon_2} < f(x) < 2 - a^{-\epsilon_2}$

Notemos, que para $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, temos $0 < a^{-\epsilon_2} < 1 < a^{\epsilon_1}$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$0 < |x - b| < \delta \implies a^{-\epsilon} < f(x) < a^{\epsilon} \implies -\epsilon < \log_a f(x) < \epsilon \implies$
$\Rightarrow |\log_a f(x)| < \epsilon$

Com isso provamos que $\lim_{x \to b} [\log_a f(x)] = 0$ para $a > 1$. Deixamos a cargo do leitor a demonstração para $0 < a < 1$.

110. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = c > 0$, então

$\lim_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a [\lim_{x \to b} f(x)] = \log_a c$.

Demonstração

Por hipótese, temos $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, isto é, $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{c} = 1$.

Pelo teorema anterior,

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{c} = 1 \implies \lim_{x \to b} \left[\log_a \frac{f(x)}{c}\right] = 0$$

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a c$, provemos

$\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x) - \log_a c] = 0.$

Temos:

$$\lim_{x \to b} [\log_a f(x) - \log_a c] = \lim_{x \to b} \left[\log_a \frac{f(x)}{c}\right] = 0$$

EXERCÍCIOS

H.98 Complete:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \log_3 x =$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} x =$

c) $\lim\limits_{x \to e^2} \ln x =$

d) $\lim\limits_{x \to 1000} \log x =$

H.99 Complete:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{0,1} x =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x =$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x =$

H.100 Complete:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \log_2 (4x^2 - 7x + 5) =$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \ln (3x^2 + 4x - 2) =$

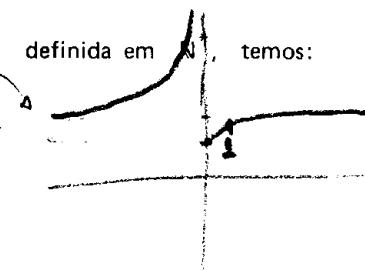
c) $\lim\limits_{x \to 3} \log \frac{6x + 2}{4x + 3} =$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x + 2}$

H.101 Complete:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \log_3 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \log \frac{x - x^3}{x^2 + x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \ln \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} =$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \log \frac{3 - \sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{6 + x} - 2} =$

V. LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

111. Teorema

Na função $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ definida em $\mathbb{N}^*$, temos:

(1) f é crescente em $\mathbb{N}^*$

(2) $2 \leqslant f(n) < 3, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

(3) existe $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$.

Demonstração de (1)

Desenvolvendo $(1 + \frac{1}{n})^n$ pelas fórmulas do Binômio de Newton (veja no livro 5), temos:

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

lembrando que $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n - i)!}$ para $i \leqslant n$, **temos:**

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

ou seja:

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\,(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}\,(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\,(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{1}{3}) \ldots (1 - \frac{n-1}{n})$$

Indicando

$$(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot (1 - \frac{3}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{i-1}{n}) \cdot (1 - \frac{i}{n}) = \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n})$$

temos

$$f(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)!} \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n})$$

Desenvolvendo de modo análogo $f(n+1) = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$, encontramos

$$f(n+1) = 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)!} \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n+1})$$

Para provarmos que $f(n+1) > f(n)$ devemos provar:

a) $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n+1}) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n})$

b) $\frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{i} (1 - \frac{j}{n+1}) > 0$

Prova de a

Notemos que para todo $j \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant j \leqslant n-1$, temos:

$$\frac{j}{n+1} < \frac{j}{n} \Longrightarrow -\frac{j}{n+1} > -\frac{j}{n} \Longrightarrow 1 - \frac{j}{n+1} > 1 - \frac{j}{n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n+1}) > \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n+1}) > \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n+1}) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n})$$

Prova de b

$$\frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{j}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n} (\frac{n+1-j}{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (n+1-j) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} \cdot n! =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0 \quad \text{pois} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Demonstração de (2)

Considerando que em (1) provamos que f é crescente em $\mathbb{N}^*$, segue-se que f assumirá o menor valor para $n = 1$, então

$$f(1) = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$$

portanto $f(n) \geqslant 2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

Provemos agora que $f(n) < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

Notemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, temos:

$$1 - \frac{j}{n} < 1 \Longrightarrow \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) < 1$$

e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, temos:

$$(1+i)! \geqslant 2^i \Longrightarrow \frac{1}{(1+i)!} \leqslant \frac{1}{2^i} \quad (*)$$

portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ e $1 \leqslant j \leqslant n-1$, temos:

$$\frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) < \frac{1}{2^i} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) < \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

Mas $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica, portanto.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

logo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \frac{j}{n}) < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} < 1 \Rightarrow f(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+i)!} \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \frac{j}{n}) < 3$$

Demonstração de (3)

Considerando que f é crescente e limitada em $\mathbb{N}^*$, seja L, $2 \leqslant L < 3$ tal que:

1º) $f(n) < L$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$
2º) se $f(n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ então $K \geqslant L$

(*) Fica como exercício provar por indução finita que $(1+i)! \geqslant 2^i$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$

Mostremos que $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$.

De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tal que $f(n_1) > L - \epsilon$. Tomando $M = n_1$, temos para todo $\epsilon > 0$ e $n > M$

$$L - \epsilon < f(n_1) < f(n) < L < L + \epsilon$$

isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$n > M \implies |f(n) - L| < \epsilon$$

112. Definição do número e

Chamamos de e o limite da função $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ definida em $\mathbb{N}^*$, quando n tende a $+\infty$.

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n}$$

O número e é um número irracional.
Um valor aproximado de e é 2,7182818284.

113. Teorema

Seja a função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 0\}$, então $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Demonstração

Sejam n e n + 1 dois números inteiros positivos e consecutivos. Para todo x tal que $n \leqslant x < n + 1$ temos:

$$n \leqslant x < n+1 \implies \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \implies 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

Considerando que $n \leqslant x < n + 1$, resulta:

$$(1 + \frac{1}{n+1})^n < (1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Mas:

1) $$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{1+n})} = \frac{e}{1} = e$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left[(1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n}) \right] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e$$

então pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

114. Teorema

Seja f a função definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 0\}$ por $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, então $\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Demonstração

Fazendo $x = -(w + 1)$ e notando que se x tende a $-\infty$ então w tende a $+\infty$, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{w \to +\infty} (1 - \frac{1}{w+1})^{-(w+1)} =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} (\frac{w}{w+1})^{-(w+1)} = \lim_{w \to +\infty} (\frac{w+1}{w})^{w+1} =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} (1 + \frac{1}{w})^{w+1} = \lim_{w \to +\infty} \left[(1 + \frac{1}{w})^w \cdot (1 + \frac{1}{w}) \right] =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} (1 + \frac{1}{w})^w \cdot \lim_{w \to +\infty} (1 + \frac{1}{w}) = e \cdot 1 = e$$

115. Teorema

Seja a função definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \neq 0\}$ por $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

então $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Demonstração

Fazendo $x = \frac{1}{y}$ obtemos $(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \frac{1}{y})^y$ e notando que

$$x \longrightarrow 0^+ \implies y \longrightarrow +\infty$$
$$x \longrightarrow 0^- \implies y \longrightarrow -\infty$$

temos

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

$$\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

portanto

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

116. Teorema

Se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ell n\, a$.

Demonstração

Para $a = 1$ temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0 = \ell n\, 1$$

Supondo $0 < a \neq 1$ e fazendo $a^x - 1 = w$, temos:

$$a^x - 1 = w \implies a^x = 1 + w \implies \ell n\, a^x = \ell n(1+w) \implies x\ell na = \ell n(1+w) \implies x = \frac{\ell n(1+w)}{\ell na}$$

Notemos que $\frac{a^x - 1}{x} = (a^x - 1) \cdot \frac{1}{x} = w \cdot \frac{\ell n\, a}{\ell n(1+w)}$.

Notando que, se x tende a zero, então w também tende a zero, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{w \to 0} \frac{w \cdot \ell na}{\ell n(1+w)} = \ell n\, a \cdot \lim_{w \to 0} \frac{1}{\frac{1}{w}\, \ell n(1+w)} =$$

$$= \ell n\, a \cdot \lim_{w \to 0} \frac{1}{\ell n\,(1+w)^{\frac{1}{w}}} = \frac{\ell n\, a}{\ell n[\lim\limits_{w \to 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}]} = \frac{\ell n\, a}{\ell n\, e} = \frac{\ell n\, a}{1} = \ell n\, a$$

EXERCÍCIOS

H.102 Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{3}{x})^x$

Solução

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x\right]^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x\right]^2 = e^2$

b) Fazendo $w = \frac{x}{3}$ temos:

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{3}{x})^x = \lim_{w \to -\infty} (1 + \frac{1}{w})^{3w} = \lim_{w \to -\infty} \left[(1 + \frac{1}{w})^w\right]^3 = e^3$$

H.103 Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{3x} =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x+2} =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{4}{x})^x =$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{2}{x})^{3x} =$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{3}{x})^{\frac{x}{4}} =$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{a}{x})^x =$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx} =$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x}{x+1})^x =$

H.104 Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x})^x =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{2}{x})^x =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{1}{x})^{3x} =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{3}{x})^{2x} =$

H.105 Calcular: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Solução

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$$

H.106 Calcular:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+4}{x-3}\right)^x$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+3}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

H.107 Calcular:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$

H.108 Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x}-1}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{e^x-e^2}{x-2}$

f) $\lim_{x \to a} \frac{e^x-e^a}{x-a}$

g) $\lim_{x \to a} \frac{2^x-2^a}{x-a}$

H.109 Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ell n(1+x)}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\ell n(1+2x)}{x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$

H.110 Calcular:

$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

CAPÍTULO V

CONTINUIDADE

I. NOÇÃO DE CONTINUIDADE

117. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I. Dizemos que f é contínua em *a*, se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que se f é contínua em *a* então as três condições deverão estar satisfeitas:

1º) existe f(a)

2º) existe $\lim_{x \to a} f(x)$

3º) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

118. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e *a* um elemento de I. Dizemos que f é descontínua em *a* se f não for contínua em *a*.

Observemos também que para falarmos em descontinuidade de uma função em um ponto é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que, se f é descontínua em *a*, então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas

1º) existe f(a)

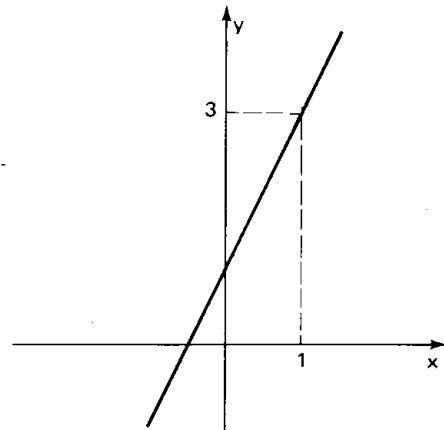
2º) não existe $\lim_{x \to a} f(x)$ ou $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

119. Definição

Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo aberto se f for contínua em todos os pontos desse intervalo.

120. Definição

Seja a um ponto do domínio da função f.

Dizemos que f é contínua à direita de a se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e dizemos que f é contínua à esquerda de a se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

121. Definição

Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua no intervalo aberto $]a, b[$ e se também for contínua em a, à esquerda, e em b, à direita.

122. Exemplos

1º) A função $f(x) = 2x + 1$ definida em IR é contínua em 1, pois

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f(1)$$

Notemos que f é contínua em IR, pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$

2º) A função

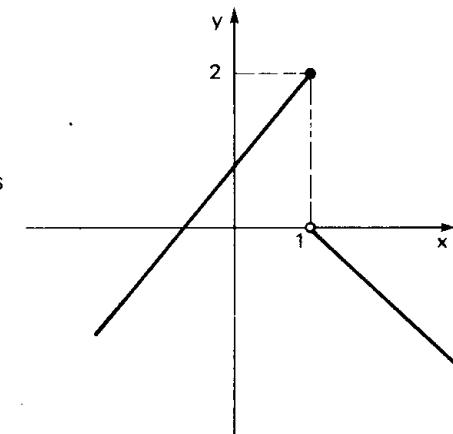
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

definida em IR é descontínua em 1, pois

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \neq 4 = f(1)$$

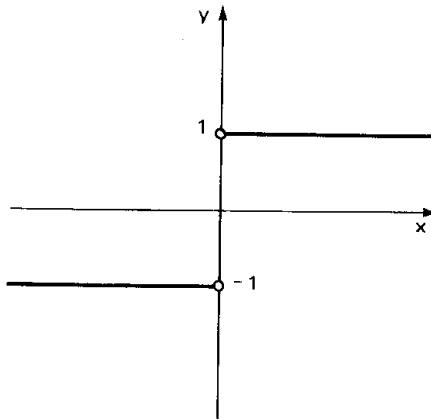
Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$

3º) A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

definida em IR é descontínua em 1, pois

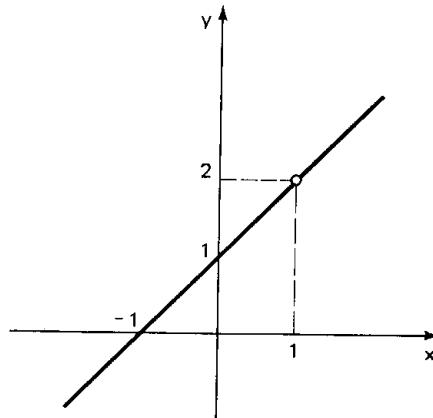
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x) = 0$

portanto, não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos: se $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (1 - x) = 1 - a = f(a)$

se $a < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$

4º) Na função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em $\mathbb{R}^*$ não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 0$, pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.

Observemos que

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^*$ pois, para todo $a \in \mathbb{R}^*$, temos:

se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} 1 = 1 = f(a)$

se $a < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (-1) = -1 = f(a)$

5º) Na função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$ não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 1$, pois $x = 1$ não pertence ao domínio da função.

Notemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$$

EXERCÍCIOS

H.111 Verificar se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$

Solução

Devemos verificar se $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

a) $f(2) = 7 - 2 \cdot 2 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (7 - 2x) = 3$

então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$

logo f é contínua em $x = 2$.

H.112 Verificar se a função f é contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 4 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ no ponto $x = -2$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ no ponto $x = -1$

H.113 Verificar se a função f contínua no ponto especificado

a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -2x & \text{se } x < -2 \end{cases}$ no ponto $x = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1 \\ x^2 + 4x - 5 & \text{se } x \leqslant 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 10 & \text{se } x > 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \\ 10 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$ no ponto $x = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

H.114 Verificar se a função f é contínua em $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

H.115 Verificar se a função f é contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x - 1|} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

H.116 Determine a para que a função seja contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ a & \text{se } x = 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{1 - x^3} & \text{se } x \neq 1 \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 3x + a & \text{se } x \leqslant 4 \end{cases}$ no ponto $x = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ 3x^2 - 4x + a & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

H.117 Determine a para que a função

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } 2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \cos a & \text{se } x = 0 \end{cases}$

seja contínua em $x = 0$

II. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

123. Teorema

Se f e g são funções contínuas em a, então são contínuas em a as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$, neste último caso, desde que $g(a) \neq 0$.

Demonstração

Demonstraremos como modelo a continuidade de $f + g$.

Como f e g são contínuas em a, pela definição temos:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Para provarmos que $f + g$ é contínua em a devemos provar a igualdade:

$\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$

De fato:

$\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) =$

$= (f + g)(a)$.

Agora faça a demonstração para as demais funções.

124. Teorema do limite da função composta

Se $\lim_{x \to a} g(x) = b$ e se f é uma função contínua em b, então

$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$, isto é, $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \to a} g(x))$.

Demonstração

O teorema ficará demonstrado se provarmos

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f \circ g)(x) - f(b)| < \epsilon$

Sabemos que f é contínua em b, isto é, $\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$, portanto,

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |y - b| < \delta_1 \implies |f(y) - f(b)| < \epsilon$ (I)

Por outro lado, $\lim_{x \to a} g(x) = b$, isto é,

$\forall \delta_1 > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - b| < \delta_1$ (II)

Se substituirmos y por $g(x)$ em (I), teremos:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |g(x) - b| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$ (III)

Com base nas afirmações (II) e (III), temos

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon \implies$
$\Rightarrow |(f \circ g)(x) - f(b)| < \epsilon$.

Observação

Este teorema continua válido se o símbolo "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

125. Teorema

Se a função g é contínua em a e a função f é contínua em $g(a)$ então a função composta $f \circ g$ é contínua em a.

Demonstração

Considerando que g é contínua em a, isto é, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ e f é contínua em $g(a)$, pelo teorema anterior temos:

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

o que prova que $f \circ g$ é contínua em a.

III. LIMITE DA $\sqrt[n]{f(x)}$

Como havíamos prometido quando da apresentação da propriedade L_8 de limites, vamos demonstrar essa propriedade, mas antes vejamos dois lemas.

126. Lema 1

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$ ou se $n \in \mathbb{N}^*$, n é ímpar e $a \in \mathbb{R}_-^*$, então $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso em que $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$. Deixaremos a cargo do leitor a demonstração para o caso $n \in \mathbb{N}^*$, n é ímpar e $a \in \mathbb{R}_-^*$.

Para demonstrarmos que

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

devemos provar

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$

Lembrando da fatoração

$y^n - b^n = (y - b) \cdot (y^{n-1} + by^{n-2} + b^2 y^{n-3} + \ldots + b^{n-2} y + b^{n-1})$

isto é

$$y^n - b^n = (y - b) \cdot \sum_{i=1}^{n} b^{i-1} y^{n-i}$$

podemos expressar $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ em termos de $|x - a|$. Façamos $\sqrt[n]{x} = y$ e $\sqrt[n]{a} = b$; decorre $x = y^n$ e $a = b^n$, então:

$$|x - a| = |y^n - b^n| = |(y - b) \cdot \sum_{i=1}^{n} b^{i-1} y^{n-i}| =$$

$$= |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|$$

e finalmente temos

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x - a|}{\left| \sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|}$$

Considerando que desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |x - a| \cdot \frac{1}{\left|\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}}\right|} < \epsilon$$

podemos fazer com que o δ seja menor ou igual a a, isto é

$$|x - a| < a \iff 0 < x < 2a$$

Fazendo $x = 0$ em $\frac{1}{\left|\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}}\right|}$, temos

$$|x - a| \cdot \frac{1}{\left|\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-n}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}}\right|} < |x - a| \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}}$$

Como queremos que

$$|x - a| \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}} < \epsilon,$$

isto é

$$|x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon$$

tomamos $\delta = \min\{a, a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon\}$ onde temos para todo $\epsilon > 0$, existe

$\delta = \min\{a, a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon\}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

De fato

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} 0 < |x - a| < a < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \\ \text{ou} \\ 0 < |x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon < a \end{cases} \implies$$

$$\Rightarrow 0 < |x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| =$$

$$= |x - a| \cdot \frac{1}{\left|\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}}\right|} < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}} = \epsilon$$

127. Lema 2

A função $h(x) = \sqrt[n]{x}$ definida em $\mathbb{R}_+$ se n é par ou definida em $\mathbb{R}$ se n é ímpar, é contínua em a para $a \in \mathbb{R}_+^*$ se n é par ou $a \in \mathbb{R}$ se n é ímpar.

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso n par, deixamos a cargo do leitor, como exercício, a demonstração para n ímpar.

Pelo lema 1, temos:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = h(a)$$

o que prova que h é contínua em a.

128. Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ onde $L \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L < 0$ e n é natural ímpar

então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Demonstração

Sendo a função h definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$ temos a composta $h \circ f$ definida por $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$.

Pelo lema 2 a função h é contínua em L, então pelo teorema do limite da função composta, temos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \to a} h(f(x)) = h\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

CAPÍTULO VI

DERIVADAS

I. DERIVADA NO PONTO x_0

129. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se *derivada de f no ponto x_0* o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0), \quad \left[\frac{df}{dx}\right]_{x = x_0} \quad \text{ou} \quad Df(x_0)$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada *acréscimo* ou *incremento da variável x* relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada *acréscimo* ou *incremento da função f* relativamente ao ponto x_0. O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ recebe o nome de *razão incremental de f* relativamente ao ponto x_0.

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que *f é derivável* no ponto x_0. Dizemos também que *f é derivável* no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

130. Exemplos

1º) Calculemos a derivada de $f(x) = 2x$ no ponto $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2$$

Outra maneira de proceder seria esta:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(3 + \Delta x) - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

2º) Calculemos a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)] - [1^2 + 1]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 3$$

3º) Calculemos a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

4º) Calculemos a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $x_0 = 0$.

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ portanto, como

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$, não existe $f'(0)$.

EXERCÍCIOS

Nos problemas que se seguem calcule $f'(x_0)$.

H.118 $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 2$

H.119 $f(x) = x^2 + 2x + 5$, $x_0 = 1$

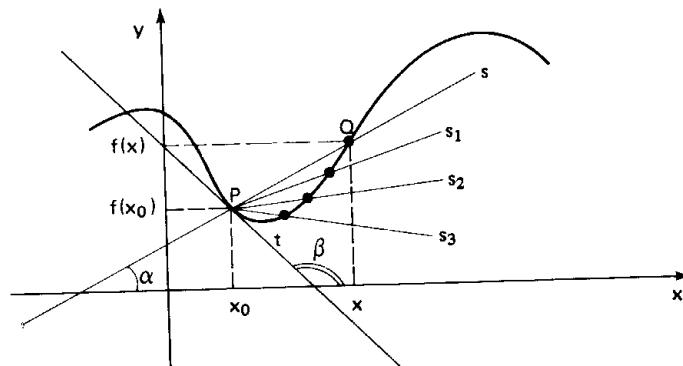
H.120 $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$

H.121 $f(x) = |x|$, $x_0 = 1$

H.122 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

H.123 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

H.124 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

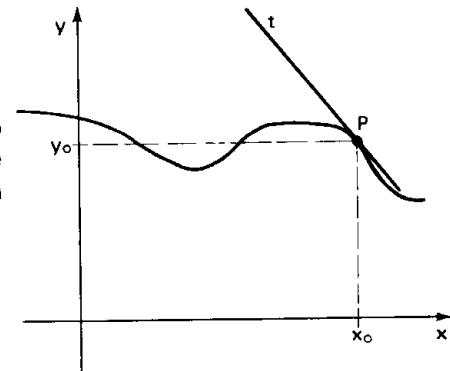
H.125 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 2$

H.126 $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 0$

H.127 $f(x) = x \cdot |x|$, $x_0 = 0$

II. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

131. Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta *s* determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

portanto, $\operatorname{tg} \alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se f é contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Conseqüentemente, a reta *s* desloca-se tomando sucessivamente as posições $s_1, s_2, s_3, \ldots$ e tende a coincidir com a reta *t*, tangente à curva no ponto P.

Como existe $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\lim_{x \to x_0} \alpha) = \operatorname{tg} \beta$, concluímos:

> A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

132. Quando queremos obter a equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular m, utilizamos a fórmula de Geometria Analítica:

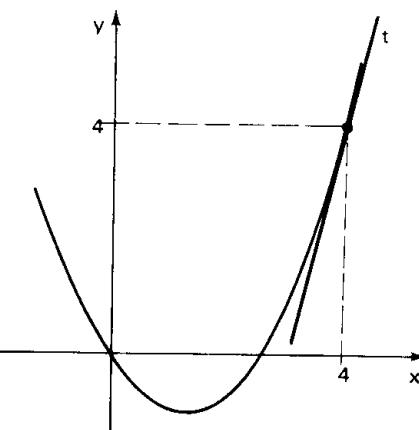
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Em particular, se queremos a equação da tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0), onde f é derivável, basta fazer $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. A equação da reta t fica:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

EXERCÍCIOS

H.128 Qual é a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 3x$ no seu ponto de abscissa 4?

Solução

$x_0 = 4 \Longrightarrow f(x_0) = 4^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$

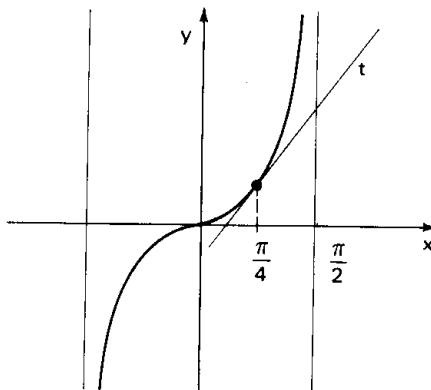
então $P(4, 4)$ é o ponto de tangência.

$f'(x_0) = f'(4) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x^2 - 3x) - 4}{x - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x - 4)(x + 1)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} (x + 1) = 5,$

portanto, o coeficiente angular de t é 5 e sua equação é

$y - 4 = 5(x - 4)$.

H.129 Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$ no ponto de abscissa $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Solução

$x_0 = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow f(x_0) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1,$ então

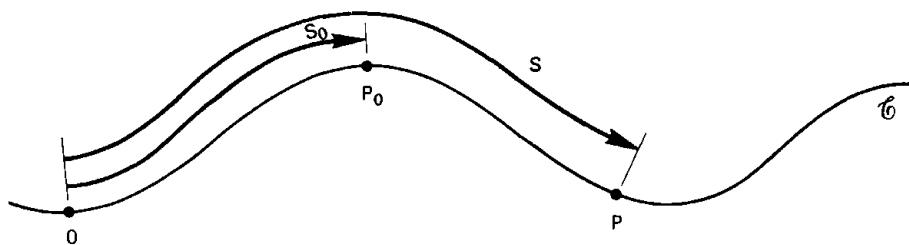
$P(\dfrac{\pi}{4}, 1)$ é o ponto de tangência.

$$f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{4}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})}{\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4}}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4}} \right] = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$$

e a equação da reta t é

$y - 1 = 2(x - \dfrac{\pi}{4})$.

H.130 Determinar, em cada caso, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0:

a) $f(x) = x + 1$, $\quad x_0 = 3$
b) $f(x) = x^2 - 2x$, $\quad x_0 = 1$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\quad x_0 = 0$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = 1$
e) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x_0 = 4$
f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $\quad x_0 = 2\sqrt{2}$

III. INTERPRETAÇÃO CINEMÁTICA

133. Do estudo da Cinemática sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva $\mathscr{C}$ (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva $\mathscr{C}$. A expressão que nos dá s em função de t:

$$s = s(t)$$

é chamada *equação horária*.

Sendo dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, chama-se *velocidade escalar média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$$

Daí se conclui que:

> A derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

134. Sabemos ainda que a velocidade *v* de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que nos dá *v* em função do tempo *t*:

$$v = v(t)$$

é chamada *equação da velocidade* do ponto.

Sendo dado um instante t_0 e um instante t, diferente de t_0, chama-se *aceleração escalar média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0)$$

Daí se conclui que:

> A derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

EXERCÍCIOS

H.131 Um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$. Calcular a sua velocidade no instante $t_0 = 2$. (Unidades S.I.)

Solução

A velocidade no instante $t_0 = 2$ é igual à derivada de s no instante t_0:

$$s'(t_0) = s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 + t - 2) - (2^2 + 2 - 2)}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{t^2 + t - 6}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t - 2)(t + 3)}{t - 2} = 5 \text{ m/s}$$

H.132 Calcular no instante $t = 3$ a velocidade de uma partícula que se move obedecendo à equação horária $s = \frac{1}{t}$. (Unidades: SI)

H.133 Um ponto material em movimento sobre uma reta tem velocidade $v = \sqrt[3]{t}$ no instante t. Calcular a aceleração do ponto no instante $t_0 = 2$. **(Unidades SI)**

Solução

A aceleração no instante $t_0 = 2$ é igual à derivada de v no instante t_0:

$$v'(t_0) = v'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{v(t) - v(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2}}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{2t} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \text{ m/s}^2$$

H.134 Calcular a aceleração de uma partícula no instante $t = 5$ sabendo que sua velocidade obedece à equação $v = 2 + 3t + 5t^2$. (Unidades: SI)

IV. FUNÇÃO DERIVADA

135. Seja f é uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada x_0 pertencente a I existe e é único o limite $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, portanto, podemos definir uma função $f': I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x_0 \in I$ a derivada de f no ponto x_0. Esta função é chamada *função derivada de f* ou, simplesmente, *derivada de f*.

Habitualmente a derivada de f é representada por f', $\frac{df}{dx}$ ou Df.

A lei $f'(x)$ pode ser determinada a partir da lei $f(x)$, aplicando-se a **definição** de derivada de uma função, num ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

É isto que faremos logo em seguida para calcular as derivadas das principais funções elementares.

V. DERIVADAS DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

136. Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = c \implies f'(x) = 0}$$

137. Derivada da função potência

Dada a função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

138. Derivada da função seno

Dada a função $f(x) = \text{sen } x$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = \text{sen } x \implies f'(x) = \cos x}$$

139. Derivada da função cosseno

Dada a função $f(x) = \cos x$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1} = -\text{sen } x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\text{sen } x}$$

140. Derivada da função exponencial

Dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, calculemos a sua derivada. Temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a}$$

No caso particular da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$, temos o resultado notável:

$$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x}$$

EXERCÍCIOS

H.135 Obter a derivada das seguintes funções:

$f(x) = 5$ $\quad g(x) = x^6$ $\quad h(x) = x^{15}$

H.136 Obter a derivada das seguintes funções:

$f(x) = c \cdot x^n$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*)$
$g(x) = \text{tg } x$
$h(x) = \sec x$

H.137 Obter a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \cos x$ no ponto $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$.

Solução

O coeficiente angular da reta procurada é:

$$f'(\frac{\pi}{3}) = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

portanto a equação da reta é:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$$

H.138 Obter a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 2.

H.139 Um móvel desloca-se sobre um segmento de reta obedecendo à equação horária $s = \cos t$ **(Unidades SI). Determinar:**

a) sua velocidade no instante $t = \frac{\pi}{4}$ s

b) sua aceleração no instante $t = \frac{\pi}{6}$ s.

Solução

a) A derivada de s nos dá em cada instante a velocidade do móvel, isto é, $v = s'(t) = -\text{sen } t$.

No instante $t = \frac{\pi}{4}$ **s, temos:**

$$v(\frac{\pi}{4}) = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}^2$$

b) A derivada de v nos dá em cada instante a aceleração do móvel, isto é, $a = v'(t) = -\cos t$.

No instante $t = \frac{\pi}{6}$ s, temos:

$$a(\frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2$$

H.140 Um móvel desloca-se sobre uma reta obedecendo à equação horária $s = t^4$ (Unidades SI). Determinar:

a) sua velocidade no instante $t = 2s$,
b) sua aceleração no instante $t = 3s$,
c) em que instante sua velocidade é 108 m/s,
d) em que instante sua aceleração é 48 m/s.

VI. DERIVADA E CONTINUIDADE

141. Teorema

Sejam a função $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.

Demonstração

Notemos que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

portanto:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e, por definição, f é contínua no ponto x_0.

142. **Notemos** que o recíproco deste teorema é falso, isto é, existem funções contínuas em x_0 e não deriváveis em x_0.

Exemplos

1º) A função $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x_0 = 0$ pois:

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

porém, esta função não é derivável no ponto $x_0 = 0$ pois:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$$

então não existe $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$.

2º) A função $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x} \neq 0$ e $f(0) = 0$ é contínua no ponto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \cos \frac{1}{x}) = 0 = f(0)$$

mas f não é derivável no ponto $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

e este último limite não existe.

CAPÍTULO VII

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Neste capítulo vamos sistematizar o cálculo das derivadas procurando obter regras de derivação para determinar a derivada de uma função, sem ter de recorrer necessariamente à definição.

I. DERIVADA DA SOMA

143. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, os dois limites do segundo membro são finitos, portanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Em resumo:

$$\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \implies f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

Notemos que esta propriedade pode ser estendida para uma soma de n funções. Assim:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) \implies f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x)$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, ..., u_n$ sejam deriváveis em I.

Notemos também que a derivada de uma diferença de funções pode ser obtida através de fórmula semelhante à da soma pois:

$f(x) = u(x) - v(x) \implies f(x) = u(x) + [-v(x)] \implies f'(x) = u'(x) + [-v'(x)]$
$\implies f'(x) = u'(x) - v'(x)$

144. Exemplos

1º) $f(x) = x + 1 \implies f'(x) = 1 + 0 = 1$
2º) $f(x) = x^2 + 3 \implies f'(x) = 2x + 0 = 2x$
3º) $f(x) = \text{sen } x + \cos x \implies f'(x) = \cos x - \text{sen } x$
4º) $f(x) = x^2 - e^x \implies f'(x) = 2x - e^x$

II. DERIVADA DO PRODUTO

145. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Temos:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$
$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$
$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] =$
$= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, e portanto contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Em resumo:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \implies f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

146. No caso particular em que $f(x) = c \cdot v(x)$, isto é, $u(x) = c$ (função constante) e $v(x)$ é uma função derivável, a regra precedente leva ao seguinte resultado:

$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) = c \cdot v'(x) + 0 \cdot v(x) = c \cdot v'(x)$

Logo,

$$f(x) = c \cdot v(x) \implies f'(x) = c \cdot v'(x)$$

147. Exemplos

1º) $f(x) = 3x^4 \implies f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$
2º) $f(x) = 3x^2 + 5x \implies f'(x) = 6x + 5$
3º) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2x) \implies f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 + 2) = 5x^4 + 9x^2 + 2$
4º) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x \implies f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

148. Notemos que a propriedade da derivada do produto pode ser estendida para um produto de n fatores. Assim:

$$f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot ... \cdot u_n(x) \implies f'(x) = u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot ... \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot ... \cdot u_n(x) + ... + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot ... \cdot u_n'(x)$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, ..., u_n$ sejam deriváveis em I.

Em particular, se $u_1(x) = u_2(x) = ... = u_n(x) = u(x)$, esta propriedade se reduz a:

$$f(x) = [u(x)]^n \implies f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

149. Exemplos

1º) $f(x) = \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} \Longrightarrow f'(x) = \underbrace{2x}_{u_1'} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} +$

$+ \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos x}_{u_2'} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} + \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3'}$

2º) $f(x) = \text{sen}^4 x = \underbrace{(\text{sen } x)}_{u}{}^4 \Longrightarrow f'(x) = 4 \cdot \underbrace{\text{sen}^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}$

3º) $f(x) = e^{5x} = \underbrace{(e^x)}_{u}{}^5 \Longrightarrow f'(x) = 5 \cdot \underbrace{e^{4x}}_{u^4} \cdot \underbrace{e^x}_{u'}$

EXERCÍCIOS

H.141 Calcular a derivada da função polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Solução

Trata-se de uma soma em que as parcelas têm a forma $a_p x^p$, portanto, sua derivada é $p \cdot a_p x^{p-1}$. Assim, temos:

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1}$

H.142 Calcular a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 8x^{11}$

b) $f(x) = -\frac{7}{5}x^3 - \frac{\sqrt{3}}{7}$

c) $f(x) = 5 + x + 3x^2$

d) $f(x) = 3 + 5x^2 + x^4$

e) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$

f) $f(x) = 3 + 2x^n + x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$

H.143 Calcular a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x \cdot \text{sen } x + 4x^3$

b) $g(x) = (x^2 + x + 1)^5$

c) $h(x) = (e^x \cdot \cos x - x^2)^4$

Solução

a) f deve ser vista como soma de duas parcelas ($e^x \cdot \text{sen } x$ e $4x^3$), portanto, f' é a soma das derivadas das parcelas, sendo que a primeira parcela é um produto, então:

$f'(x) = Df(x) = D(e^x \cdot \text{sen } x) + D(4x^3) =$

$= D(e^x) \cdot \text{sen } x + e^x \cdot D(\text{sen } x) + D(4x^3) = e^x \cdot \text{sen } x + e^x \cdot \cos x + 12x^2$

b) fazendo $x^2 + x + 1 = u(x)$, vem $g(x) = [u(x)]^5$, então:

$g'(x) = 5 \cdot [u(x)]^4 \cdot u'(x) = 5(x^2 + x + 1)^4 (2x + 1)$

c) Fazendo $e^x \cdot \cos x - x^2 = u(x)$, vem $h(x) = [u(x)]^4$, então:

$h'(x) = 4 \cdot [u(x)]^3 \cdot u'(x) = 4 \cdot (e^x \cdot \cos x - x^2)^3 \cdot (e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \text{sen } x - 2x)$

H.144 Obter a derivada de cada função f dada abaixo:

a) $f(x) = (3x^2 + x)(1 + x + x^3)$

b) $f(x) = x^2(x + x^4)(1 + x + x^3)$

c) $f(x) = (2 + 3x + x^2)^5$

d) $f(x) = (2x + 3)^{52}$

e) $f(x) = x^3 \cdot e^x$

f) $f(x) = x \cdot e^x + \cos x$

g) $f(x) = x^4 \cdot a^{2x}$

h) $f(x) = e^{3x}$

i) $f(x) = e^{x^2+x+1}$

j) $f(x) = \cos^5 x$

k) $f(x) = \text{sen}^7 x \cdot \cos^3 x$

l) $f(x) = a \cdot \text{sen } x + b \cdot \cos x \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

H.145 Calcular a derivada da função $f(x) = (\text{sen } x + e^x)^2 (\cos x + x^3)^3$ no ponto $x_0 = 0$.

H.146 Obter a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = (3 \cdot \text{sen } x + 4 \cdot \cos x)^5$ no ponto de abscissa $x_0 = \pi$.

H.147 Obter a velocidade e a aceleração de um ponto material que percorre um segmento de reta obedecendo à equação horária $s = a \cdot e^{-t} \cdot \cos t$, com $a \in \mathbb{R}$. (Unidades: SI).

III. DERIVADA DO QUOCIENTE

150. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em I e $v(x) \neq 0$ em I. Provemos que a função $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ também é derivável em I e sua derivada é

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} - \frac{u(x)\cdot[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \Delta u \cdot \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \cdot \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são deriváveis e contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, portanto, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, ou melhor, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x)$$

Em resumo:

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

151. Exemplos

1º) $f(x) = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x\cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$

2º) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)(x+1) - (x^2+1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

3º) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{a^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot a^x - \text{sen } x \cdot a^x \cdot \log_e a}{(a^x)^2} =$

$$= \frac{(\cos x - \text{sen } x \cdot \log_e a)}{a^x}$$

152. Conseqüências

1ª) *Derivada da função tangente*

Dada a função $f(x) = \text{tg } x$, sabemos que $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ e então podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$u(x) = \text{sen } x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\text{sen } x$

portanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Logo

$$\boxed{f(x) = \text{tg } x \Longrightarrow f'(x) = \sec^2 x}$$

2ª) *Derivada da função* $f(x) = [u(x)]^{-n},\ n \in \mathbb{N}^*$

Dada a função $f(x) = [u(x)]^{-n} = \frac{1}{[u(x)]^n}$, podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$$f'(x) = \frac{0\cdot[u(x)]^n - 1\cdot n\cdot[u(x)]^{n-1}\cdot u'(x)}{[u(x)]^{2n}} = \frac{n\cdot u'(x)}{[u(x)]^{n+1}} =$$

$$= -n \cdot [u(x)]^{-(n+1)} \cdot u'(x)$$

Em particular, se $u(x) = x$ vem a importante regra:

$$\boxed{f(x) = x^{-n} \Longrightarrow f'(x) = -n\cdot x^{-(n+1)}}$$

EXERCÍCIOS

H.148 Derivar as seguintes funções:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x^4}$, $h(x) = \frac{1}{\text{sen } x}$, $i(x) = \frac{7}{e^{2x}}$

Solução

$f(x) = x^{-1} \Longrightarrow f'(x) = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$g(x) = 2 \cdot x^{-4} \quad \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$

$h(x) = (\text{sen } x)^{-1} \quad \Rightarrow h'(x) = (-1) \cdot (\text{sen } x)^{-2} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

$i(x) = 7 \cdot (e^x)^{-2} \quad \Rightarrow i'(x) = 7 \cdot (-2) \cdot (e^x)^{-3} = -\frac{14}{e^{3x}}$

H.149 Derivar as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{2}{x^7}$

b) $f(x) = 3x^{-5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$

g) $f(x) = \frac{x^2 \cdot \text{sen } x}{e^x}$

h) $f(x) = \frac{\cos x}{x \cdot e^x}$

H.150 Obter a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{cotg } x$

b) $f(x) = \sec x$

c) $f(x) = \text{cossec } x$

d) $f(x) = \text{tg}^2 x$

e) $f(x) = \sec x - \text{tg } x$

f) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \text{tg } x$

g) $f(x) = \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x + \cos x}$

h) $f(x) = \left(\frac{e^x}{\text{tg } x}\right)^2$

H.151 Obter a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$ no ponto de abscissa $x_0 = -1$.

H.152 Calcular o valor da derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x} + \sec^2 x$ quando $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

H.153 (MAPOFEI-70) — É dada a função $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

a) Determinar a derivada.

b) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} y$.

c) Determinar os pontos do gráfico em que a tangente passa pela origem.

IV. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA (REGRA DE CADEIA)

153. Seja $f: A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g: B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F: A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x e sua derivada é $F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$.

Temos inicialmente:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Notemos que se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero pois a função $y = f(x)$ é derivável e, portanto, contínua no ponto x. Assim, para valores próximos de x $(\Delta x \to 0)$ a função f assume valores próximos de $y = f(x)$ $(\Delta y \to 0)$.

Então, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como $z = g(y)$ e $y = f(x)$ são deriváveis, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ são ambos finitos, portanto, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ também. Assim $z = F(x)$ é derivável e sua derivada é:

$$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

Em resumo:

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \Longrightarrow F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

154. Exemplos

1º) Derivar $F(x) = \cos 2x$.
Fazendo $y = f(x) = 2x$ e $z = g(y) = \cos y$, temos:
$y' = f'(x) = 2$ e $z' = g'(y) = -\text{sen } y$, portanto, vem:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (-\text{sen } y) \cdot 2 = -2 \cdot \text{sen } 2x$

2º) Derivar $F(x) = \text{sen}^3 x$.
Fazendo $y = f(x) = \text{sen } x$ e $z = g(y) = y^3$, temos:
$y' = f'(x) = \cos x$ e $z' = g'(y) = 3y^2$, portanto, vem:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (3y^2) \cdot \cos x = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

3º) Derivar $F(x) = e^{7x^2-2x}$.

Fazendo $y = 7x^2 - 2x$ e $z = g(y) = e^y$, temos:
$y' = f'(x) = 14x - 2$ e $z' = g'(y) = e^y$, portanto, vem:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot (14x - 2) = (14x - 2) \cdot e^{7x^2-2x}$.

EXERCÍCIOS

H.154 Utilizando a regra da função composta, obter a derivada de cada função abaixo:

a) $F(x) = \cos^n x \ (n \in \mathbb{N}^*)$
b) $F(x) = \text{sen}\, x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$
c) $F(x) = a^{(x^2)} \ (a \in \mathbb{R}_+)$
d) $F(x) = (f(x))^n (n \in \mathbb{N}^*)$
e) $F(x) = \cos(\text{sen}\, x)$
f) $F(x) = \text{sen}^3 3x$

Solução

a) Fazendo $y = f(x) = \cos x$ e $z = g(y) = y^n$, temos:
$y' = f'(x) = -\text{sen}\, x$ e $z' = g'(y) = n \cdot y^{n-1}$, portanto, vem:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (ny^{n-1})(-\text{sen}\, x) = -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \text{sen}\, x$

b) Fazendo $y = f(x) = x^n$ e $z = g(y) = \text{sen}\, y$, vem: $y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
e $z' = g'(y) = \cos y$ e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (\cos y) \cdot (nx^{n-1}) = nx^{n-1} \cdot \cos x^n$

c) Fazendo $y = f(x) = x^2$ e $z = g(y) = a^y$, vem: $y' = f'(x) = 2x$ e
$z' = g'(y) = a^y \cdot \log_e a$ e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (a^y \cdot \log_e a)(2x) = 2xa^{(x^2)} \cdot \log_e a$

d) Fazendo $y = f(x)$ e $z = g(y) = y^n$, vem: $y' = f'(x)$ e
$z' = g'(y) = ny^{n-1}$, e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = ny^{n-1} f'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$

e) Fazendo $y = f(x) = \text{sen}\, x$ e $z = g(y) = \cos y$, vem: $y' = f'(x) = \cos x$ e
$z' = g'(y) = -\text{sen}\, y$ logo:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (-\text{sen}\, y)(\cos x) = -\cos x \cdot \text{sen}\,(\cos x)$

f) Fazendo $y = f(x) = 3x$, $z = g(y) = \text{sen}\, y$ e $t = h(z) = z^3$, temos
$y' = f'(x) = 3$, $z' = g'(y) = \cos y$ e $t' = h'(z) = 3z^2$.

Notemos que $F(x) = h(g(f(x)))$, isto é, F é a composta de três funções. Como a regra da composta pode ser generalizada para a composta de n funções, vem:
$F'(x) = h'(z) \cdot g'(y) \cdot f'(x) = (3z^2)(\cos y)(3) = (3 \cdot \text{sen}^2 y)(\cos y)(3) =$
$= 9 \cdot \text{sen}^2 3x \cdot \cos 3x$

H.155 Obter a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $F(x) = \text{sen}\, 4x$
b) $F(x) = \dfrac{\cos 7x}{x}$
c) $F(x) = a \cdot \text{sen}\, bx \ (a, b \in \mathbb{R})$
d) $F(x) = \cos(3x^2 + x + 5)$
e) $F(x) = \text{sen}\, e^x$
f) $F(x) = x + 3 \cdot \text{tg}\, 4x$
g) $F(x) = a^{\text{sen}\, x} \ (a \in \mathbb{R}_+)$
h) $F(x) = \text{cotg}(3x - 1)$

i) $F(x) = a^{x^2+5x+1} \ (a \in \mathbb{R}_+)$
j) $F(x) = \text{tg}(\cos x)$
k) $F(x) = \text{tg}^3 2x$
l) $F(x) = e^{\text{sen}\, 2x}$

H.156 Calcular o valor da derivada da função $f(x) = \cos^3 x + \text{sen}^3 x$ no ponto $x_0 = \pi/2$.

H.157 Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{x^2+5x}$ no ponto de abscissa -1.

H.158 Obter a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ no ponto de abscissa -2.

H.159 (EPUSP-61) As derivadas dos termos da seqüência:

$\text{sen}\, x,\ \text{sen}(x + \frac{\pi}{2}),\ \text{sen}(x + \pi),\ \ldots,\ \text{sen}(x + \frac{n\pi}{2}),\ \ldots$

também são termos da seqüência?

V. DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

155. Seja a função $y = f(x)$ bijetora e derivável em I tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in I$. Provemos que a função inversa $x = f^{-1}(y)$ é derivável em $f(I)$ e que $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, sendo $y = f(x)$.

Como f é bijetora e derivável temos que $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta y \neq 0$, portanto podemos escrever:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Sendo f derivável e, portanto, contínua, se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero. Assim, temos:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Logo,

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

156. Conseqüências

1. *Derivada da função logarítmica*

Sabemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial:

$y = \log_a x \implies x = a^y$

Já vimos que:

$x = a^y \implies x' = a^y \cdot \ell n\, a$

Empregando a regra ora deduzida, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}$$

Em resumo,

$$\boxed{y = \log_a x \implies y' = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}}$$

No caso particular em que $a = e$, temos:

$$\boxed{y = \ell n\, x \implies y' = \frac{1}{x}}$$

2. *Derivada da função potência com expoente real*

Dada a função $y = x^\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, temos:

$y = x^\alpha = (e^{\ell n\, x})^\alpha = e^{\alpha \cdot \ell n\, x}$

Aplicando a regra de derivação da função logarítmica, obtemos:

$$y' = e^{\alpha \cdot \ell n\, x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Em resumo, fica generalizada para qualquer α real a seguinte regra:

$$\boxed{y = x^\alpha \implies y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

3. *Derivada da função arc sen*

Sabemos que a função $y = \text{arc sen } x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é a inversa de $x = \text{sen } y$:

$y = \text{arc sen } x \implies x = \text{sen } y$

Já vimos que:

$x = \text{sen } y \implies x' = \cos y$

Empregando a regra da derivada da inversa, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Em resumo,

$$\boxed{y = \text{arc sen } x \implies y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

4. *Derivada da função arc cos*

Sabemos que a função $y = \text{arc cos } x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $[0, \pi]$ é a **inversa** de $x = \cos y$:

$y = \text{arc cos } x \iff x = \cos y$

Já vimos que:

$x = \cos y \implies x' = -\text{sen } y$

Empregando a regra da inversa, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\text{sen } y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Em resumo,

$$\boxed{y = \text{arc cos } x \implies y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

5. *Derivada da função arc tg*

Dada a função $y = \text{arc tg } x$, de $\mathbb{R}$ em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, sabemos que:

$y = \text{arc tg } x \iff x = \text{tg } y$

então:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Em resumo,

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \implies y' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EXERCÍCIOS

H.160 Determinar a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x$
b) $f(x) = \log_2 \cos x$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$
f) $f(x) = \text{arc sen } x^2$
g) $f(x) = \text{arc cos } e^x$
h) $f(x) = \text{arc tg } (\ell n\ x)$

Solução

a) $f' = \dfrac{1}{x \cdot \ell n 2}$

b) Vamos aplicar a regra para funções compostas:

$y = \cos x$ e $z = \log_2 y$ então $f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{y \cdot \ell n 2} \cdot (-\text{sen } x) =$

$= -\dfrac{\text{sen } x}{\cos x \cdot \ell n 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

e) Fazendo $y = \text{sen } x$ e $z = \sqrt{y}$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$

f) Fazendo $y = x^2$ e $z = \text{arc sen } y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot 2x = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

g) Fazendo $y = e^x$ e $z = \text{arc cos } y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot e^x = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

h) Fazendo $y = \ell n\ x$ e $z = \text{arc tg } y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{1+y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(1+\ell n^2 x)}$

H.161 Determinar a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ell n\ x$
b) $f(x) = x^n \cdot \ell n\ x \quad (n \in \mathbb{N})$
c) $f(x) = (ax+b) \cdot \ell n\ x$
d) $f(x) = \text{sen } x \cdot \ell n\ x$
e) $f(x) = \dfrac{\ell n\ x}{\cos x}$
f) $f(x) = \ell n\ (ax^2 + bx + c)$
g) $f(x) = \ell n \text{ sen } x$
h) $f(x) = \log_a \log_b x$

H.162 Determinar a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{4/7}$
b) $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$
c) $f(x) = x\sqrt{x^7}$
d) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{3}{x^2}}$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
f) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - x^{-2}$
g) $f(x) = \sqrt{ax+b} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
h) $f(x) = \sqrt[3]{ax^2+bx+c} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
i) $f(x) = \sqrt{a + b\sqrt{x}} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$
k) $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)^2} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
l) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x+x^2)^4}$
m) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}$
n) $f(x) = (x^2+1) \cdot \sqrt{3x+2}$
o) $f(x) = \dfrac{3+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$
p) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$
q) $f(x) = \cos\sqrt{x}$
r) $f(x) = \sqrt{\cos x}$
s) $f(x) = \ell n \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
t) $f(x) = \log_a \sqrt{1+x}$

H.163 Determinar a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{arc sen } 3x$
b) $f(x) = \text{arc cos } x^3$
c) $f(x) = \text{arc tg } \dfrac{1}{x}$
d) $f(x) = x^2 + \text{arc sen } x$
e) $f(x) = \text{arc cos } x - \sqrt{x}$
f) $f(x) = x \cdot \text{arc tg } x$
g) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\text{arc sen } x}$
h) $f(x) = \ell n \text{ arc cos } x$
i) $f(x) = \sqrt{\text{arc tg } x}$
j) $f(x) = x \cdot \text{arc sen } x^2 - e^{x^3}$
k) $f(x) = \text{arc cos } \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$
l) $f(x) = \ell n \dfrac{\text{arc sen } x}{\text{arc cos } x}$

H.164 Obter a equação da reta tangente à curva $y = x \cdot \sqrt{x+1}$ no ponto de abscissa $x_0 = 3$.

H.165 Obter os pontos em que a reta tangente à curva $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ é paralela ao eixo dos x.

H.166 Obter o valor da derivada da inversa da função $f(x) = x^3 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução

$y = x^3 + x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2+1}$ para $x = 1$, temos

$$\left[\frac{dx}{dy}\right]_{x_0=1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

H.167 (EPUSP-67) Dada a função $y = x^3 + x^2 + 4x$, calcular a derivada de sua função inversa no ponto $y_0 = 6$.

H.168 Dada a função $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$, calcular sua derivada.

Solução

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)} = [e^{\ell n\, u(x)}]^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ell n\, u(x)}$$

Aplicando a regra de derivação da função composta, temos:

$y = v(x) \cdot \ell n\, u(x)$ e $z = e^y$

então:

$$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = e^y \cdot [v'(x) \cdot \ell n\, u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)]$$

e finalmente:

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \cdot [v'(x) \cdot \ell n\, u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}]$$

H.169 Obter a derivada da função $f(x) = (\cos x)^x$.

Solução

Empregando a regra que acaba de ser deduzida, vem:

$$f'(x) = (\cos x)^x \cdot [1 \cdot \ell n \cos x + x \cdot \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x}] =$$

$$= (\cos x)^x \cdot (\ell n \cos x - x \cdot \text{tg}\, x)$$

H.170 Obter a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{(x^2)}$

b) $f(x) = x^{(x^3)}$

c) $f(x) = x^{(e^x)}$

d) $f(x) = (e^x)^{\text{tg}\, 3x}$

VI. DERIVADAS SUCESSIVAS

157. Seja f uma função contínua em um intervalo I e seja I_1 o conjunto dos pontos de I em que f é derivável. Em I_1 já definimos a função f', chamada *função derivada primeira* de f. Seja I_2 o conjunto dos pontos de I_1 em que f' é derivável. Em I_2 podemos definir a função derivada de f' que chamaremos de *derivada segunda* de f e indicaremos por f''.

Repetindo o processo, podemos definir as derivadas terceira, quarta, etc de f. A derivada de ordem n de f representaremos por $f^{(n)}$.

158. Exemplos

1º) Calcular as derivadas de $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.
Temos:

$f'(x) = 6x + 5$

$f''(x) = 6$

$f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0$

2º) Calcular as derivadas de $f(x) = \text{sen}\, 2x$.
Temos:

$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x$

$f''(x) = -4 \cdot \text{sen}\, 2x = 2^2 \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

$f'''(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \cos(2x + \pi)$

$f^{(n)} = 2^n \cdot \cos(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}$

EXERCÍCIOS

H.171 Calcular as derivadas sucessivas para cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \cos x$

H.172 Um ponto móvel sobre uma reta tem abscissa s dada em cada instante t pela lei $s = a \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ onde a, ω e φ são números reais dados. Determinar:

a) a lei que dá a velocidade do ponto em cada instante;
b) a velocidade no instante $t = 0$;
c) a lei que dá a aceleração do ponto em cada instante;
d) a aceleração no instante $t = 1$.

H.173 (EPUSP-67) A função $y = A \cdot \text{sen}\, kx$, com $A > 0$, e sua derivada segunda y'' satisfazem identicamente a igualdade $y'' + 4y = 0$. O valor da derivada primeira y', para $x = 0$, é 12. Calcular as constantes de A e k.

CAPÍTULO VIII

ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Neste capítulo mostraremos algumas aplicações das derivadas. Veremos que, a partir da derivada de uma função, muitas conclusões podem ser tiradas sobre a variação da função e, portanto, sobre seu gráfico.

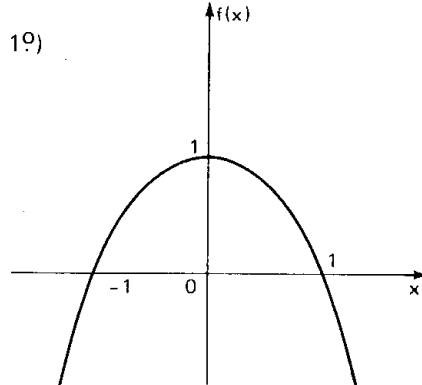
I. MÁXIMOS E MÍNIMOS

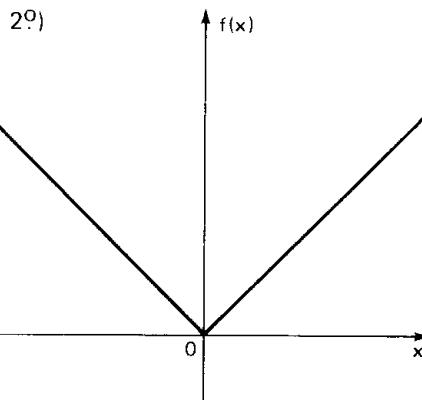
159. Definições

I) Seja a função $f: D \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos *vizinhança de* x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta, \ x_0 + \delta[$, onde δ é um número real positivo.

II) Dizemos que x_0 é um *ponto de máximo local* de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que

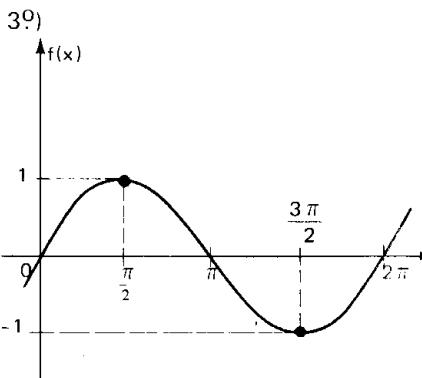
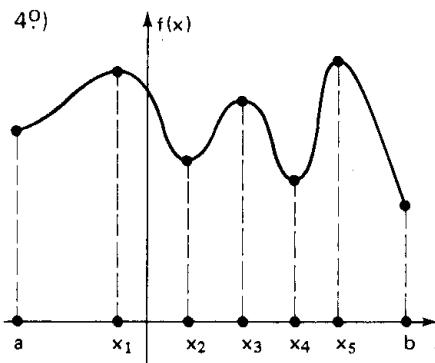
$$(\forall x)(x \in V \implies f(x) \leq f(x_0))$$

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *máximo local* de f.

III) Dizemos que x_0 é um *ponto de mínimo local* de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que

$$(\forall x)(x \in V \implies f(x) \geq f(x_0))$$

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *mínimo local* de f.

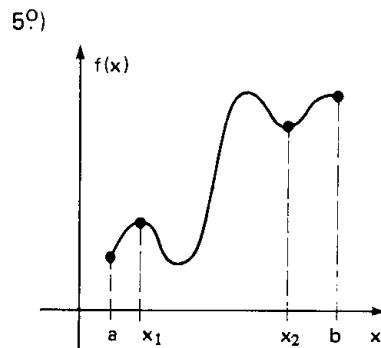
IV) Dizemos que x_0 é um *ponto extremo* ou um *extremante* se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado valor *extremo* de f.

160. Exemplos

1º)

$x = 0$ é ponto de máximo local da função $f(x) = 1 - x^2$; o máximo local de f é $f(0) = 1$.

2º)

$x = 0$ é o ponto de mínimo local de $f(x) = |x|$; o mínimo local de f é $f(0) = 0$.

3º)

$x = \frac{\pi}{2}$ é ponto de máximo local de $f(x) = \text{sen}\, x$, o máximo local de f é $f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

$x = \frac{3\pi}{2}$ é ponto de mínimo local de $f(x) = \text{sen}\, x$; o mínimo local de f é $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$.

4º)

a, x_2, x_4 e b são pontos de mínimo locais de f, enquanto x_1, x_3 e x_5 são pontos de máximo locais de f.

Os pontos de máximo ou mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados *pontos de máximo ou mínimo locais interiores.* No 4º exemplo, x_2 e x_4 são pontos de mínimo locais interiores.

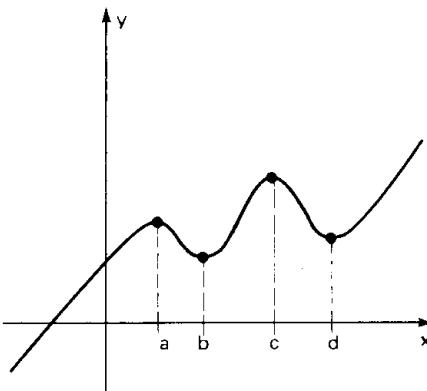
5º)

As noções de máximo e mínimo locais referem-se a uma vizinhança do ponto considerado. Na função representada ao lado, existe uma vizinhança V_1 de x_1 em que $f(x) \leqslant f(x_1), \forall x$, por outro lado, existe uma vizinhança V_2 de x_2 em que $f(x) \geqslant f(x_2), \forall x$. Isto leva à conclusão (aparentemente contraditória) de que x_1 é ponto de máximo local, x_2 é ponto de mínimo local e $f(x_1) < f(x_2)$.

161. Definição

Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor máximo absoluto* de f se $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo x do dominio de f, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume.

Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor mínimo absoluto* de f se $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.

Voltando aos cinco exemplos anteriores, temos:

1º) o valor máximo absoluto de $f(x) = 1 - x^2$ é 1;

2º) o valor mínimo absoluto de $f(x) = |x|$ é 0;

3º) $f(x) = \text{sen}\, x$ tem um máximo absoluto que é 1 e um mínimo absoluto que é -1;

4º) $f(x_5)$ e $f(b)$ são, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f.

Observemos que são muitas as funções que têm máximos ou mínimos locais mas não apresentam um máximo ou mínimo absoluto.

Por exemplo, observando o gráfico ao lado, vemos que *a* e *c* são pontos de máximo local, *b* e *d* são pontos de mínimo local, porém, a função não tem máximo absoluto nem mínimo absoluto.

162. Teorema de Fermat

Se $f: D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f, então $f'(x_0) = 0$.

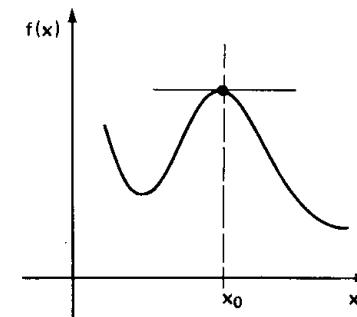
Demonstração

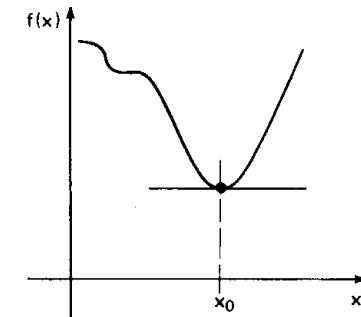
Suponhamos que x_0 seja ponto de mínimo local interior de f. Existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, tem-se:

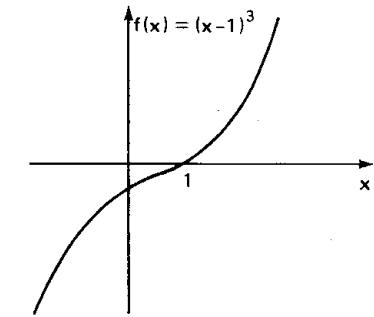
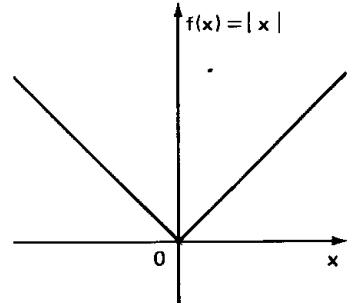
$$f(x_0) \leqslant f(x) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \quad \text{para} \quad x < x_0 \\ \\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad \text{para} \quad x > x_0 \end{cases}$$

Sendo f derivável em x_0, existe e é finito o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

que coincide com os limites laterais à esquerda e à direita de x_0. Lembrando do teorema da conservação do sinal para limites, temos:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leqslant 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

Se x_0 for ponto de máximo local de f, a demonstração é análoga.

Interpretação geométrica

O teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Observemos, porém, que o recíproco do teorema de Fermat é falso, isto é, existem funções f deriváveis no ponto x_0 do seu domínio, $f'(x_0) = 0$ e x_0 não é ponto extremo de f. É o caso, por exemplo da função $f(x) = (x-1)^3$. Sua derivada é $f'(x) = 3(x-1)^2$, então $f'(1) = 0$ e 1 não é ponto extremo.

Observemos ainda que o teorema de Fermat não exclui a possibilidade de x_0 ser ponto extremo sem que se tenha $f'(x_0) = 0$. Isto pode ocorrer se f não é derivável em x_0. Por exemplo, 0 é ponto de mínimo de função $f(x) = |x|$ e não existe $f'(0)$.

II. DERIVADA – CRESCIMENTO – DECRÉSCIMO

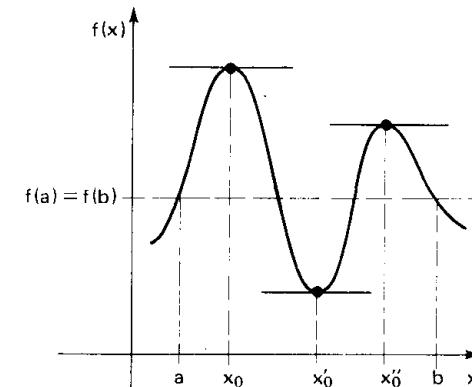
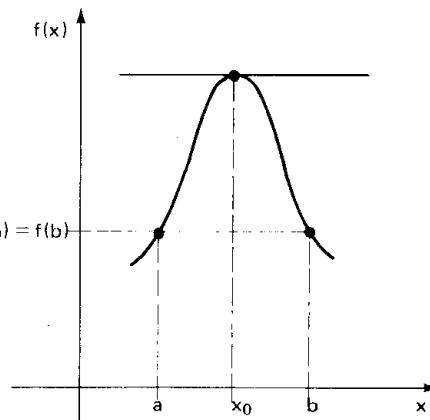
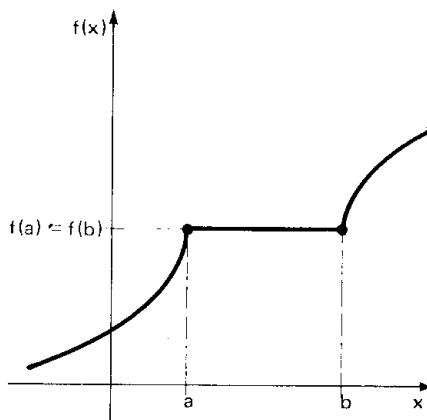
163. Neste item vamos provar alguns teoremas que terminam por estabelecer um elo de ligação entre a derivada de uma função e crescimento ou decréscimo desta.

164. Teorema de Rolle

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, é derivável em $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

1º caso: f é constante em $[a, b]$

Neste caso $f'(x) = 0$ em $]a, b[$, isto é, para todo $x_0 \in]a, b[$ temos $f'(x_0) = 0$.

2º caso: f não é constante em $[a, b]$

Neste caso existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $[a, b]$, f tem um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor $f(a) = f(b)$ não é o máximo de f em $[a, b]$, portanto, f assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in]a, b[$ e, sendo f, derivável em $]a, b[$, temos $f'(x_0) = 0$.

Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, a prova é análoga.

Interpretação geométrica

O teorema de Rolle afirma que se uma função é derivável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em algum ponto de $]a, b[$ a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

165. Teorema de Lagrange ou Teorema do valor médio

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$.

Demonstração

1º caso: $f(a) = f(b)$

Neste caso $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2º caso: $f(a) \neq f(b)$

Consideremos a função $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$

Observemos que:

I) g é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença entre $f(x) - f(a)$ e $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ que são contínuas em $[a, b]$;

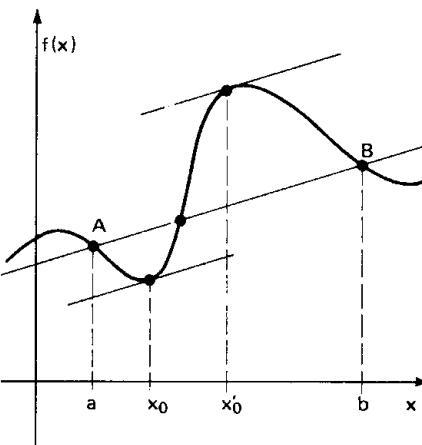
II) g é derivável em $]a, b[$ e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

III) nos extremos do intervalo $[a, b]$, temos:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$$

portanto, $g(a) = g(b) = 0$.

Sendo assim, é válido para g o teorema de Rolle: existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é,

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ou ainda,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretação geométrica

Segundo o teorema de Lagrange, se f é função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais.

EXERCÍCIOS

H.174 Dada $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5x$, verificar se estão satisfeitas as condições para validade do Teorema de Rolle em cada um dos seguintes intervalos: $[0, 1]$, $[1, \frac{5}{2}]$ e $[0, \frac{5}{2}]$. Determinar um número α em cada um desses intervalos de modo que $f'(\alpha) = 0$.

Solução

Notemos que f é derivável e contínua em $\mathbb{R}$, portanto, também é nos intervalos dados. Temos $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(\frac{5}{2}) = \frac{75}{4}$. Assim, o teorema de Rolle é válido só no intervalo $[0, 1]$. Determinemos $\alpha \in [0, 1]$ tal que $f'(\alpha) = 0$:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x + 5 = 0 \implies x = \frac{9 + \sqrt{21}}{12} \text{ ou } x = \frac{9 - \sqrt{21}}{12},$$

portanto, $\alpha = \frac{9 - \sqrt{21}}{12}$.

Nos exercícios H.175 a H.177 verificar que hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função f no intervalo I.

H.175 $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x - 4}$ e $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

H.176 $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $I = [-3, 7]$

H.177 $f(x) = 1 - |x|$ e $I = [-1, 1]$

H.178 O recíproco do teorema de Rolle não é válido. Dar exemplos de funções para as quais a tese do teorema é válida, porém, uma das hipóteses não é.

Nos exercícios H.179 a H.181 verificar que as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas pela função f no intervalo I. Em seguida, obter um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

H.179 $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $I = [2, 4]$

H.180 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e $I = [-1, 2]$

H.181 $f(x) = x^3 - 16x$ e $I = [0, 4]$

H.182 Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, verificar que as condições para validade do teorema do valor médio estão satisfeitas para $a = -1$ e $b = 2$. Encontrar todos os números α, $\alpha \in]-1, 2[$, tal que $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(-1)}{(2) - (-1)}$.

Solução

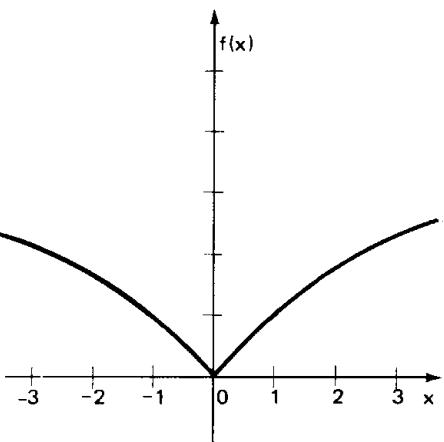
Notemos que f é derivável e contínua em $\mathbb{R}$, portanto, também é no intervalo $[-1, 2]$.
Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Então:

$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \implies 3\alpha^2 + 6\alpha = \frac{15 - (-3)}{2 - (-1)} \implies 3\alpha^2 + 6\alpha - 6 = 0 \implies$$
$$\implies \alpha = -1 + \sqrt{2} \text{ ou } \alpha = -1 - \sqrt{2}.$$

Como queremos α no intervalo $]-1, 2[$, só convém $\alpha = -1 + \sqrt{2}$.

Nos exercícios H.183 a H.186 verificar que as hipóteses do teorema de Lagrange são satisfeitas pela função f no intervalo I. Em seguida, obter um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

H.183 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $I = [0, 1]$

H.184 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e $I = [0, 1]$

H.185 $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ e $I = [-8, 6]$

H.186 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 1}$ e $I = [2, 6]$

H.187 Dada $f(x) = x^{2/3}$, esboçar o gráfico de f e mostrar que não existe um número α, $\alpha \in]-3, 3[$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(3) - f(-3)}{(3) - (-3)}$. Qual a hipótese do teorema do valor médio que não se verificou?

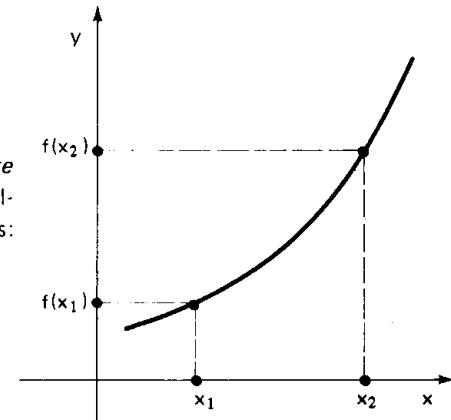
Solução

Dando valores a x e calculando os correspondentes valores de $f(x)$, podemos obter pontos e esboçar o gráfico ao lado.

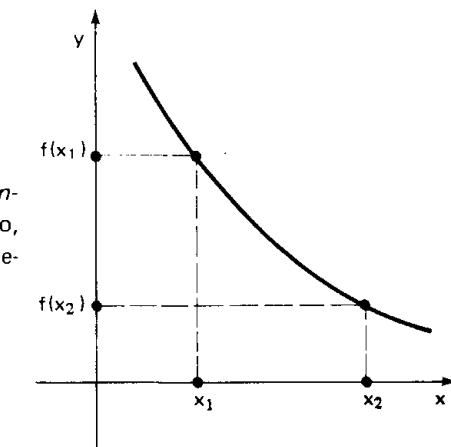
Temos $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^{-1/3}$, então:

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \Longrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{3^{2/3} - (-3)^{2/3}}{3 - (-3)} = 0$$

e não existe α satisfazendo esta última igualdade.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é derivável no ponto $x = 0$ que está no intervalo $]-3, 3[$. Isto invalida uma das hipóteses do teorema do valor médio.

Nos exercícios H.188 a H.190 verificar que hipótese do teorema de Lagrange não está satisfeita pela função f no intervalo I.

H.188 $f(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$ e $I = [1, 6]$

H.189 $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 4}$ e $I = [1, 2]$

H.190 $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 8 - 3x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$ e $I = [-2, 4]$

166. Lembremos agora os conceitos de função crescente e de função decrescente num intervalo I.

Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é *crescente* num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é *decrescente* num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Podemos também dizer que f é uma função crescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, aumenta o valor de f(x).

Notemos ainda que se f é crescente então $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais iguais.

Podemos também dizer que f é uma função decrescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, diminui o valor de f(x).

Notemos ainda que se f é decrescente, então $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais contrários.

167. Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:

I) $f'(x) \geqslant 0$ em $]a, b[\iff$ f é crescente em $[a, b]$

II) $f'(x) \leqslant 0$ em $]a, b[\iff$ f é decrescente em $[a, b]$

Demonstração

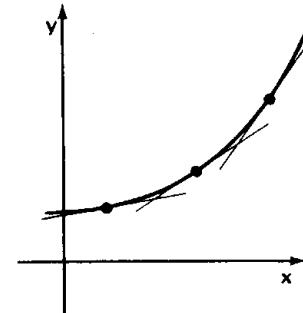
1ª parte: $\Longleftarrow$

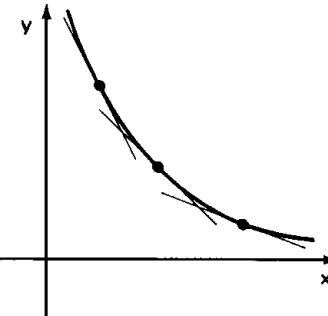
I) Seja $x_0 \in I =]a, b[$. Dado um outro ponto $x \in I$, consideremos o quociente $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Conforme vimos no item anterior, se f é crescente em I, este quociente é positivo. De acordo com o teorema da conservação do sinal, decorre que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0$.

II) Pode-se provar analogamente.

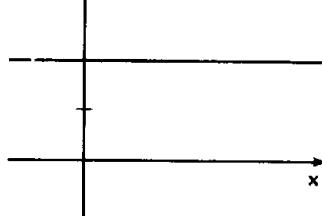
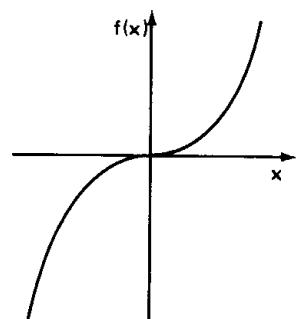
2ª parte: $\Longrightarrow$

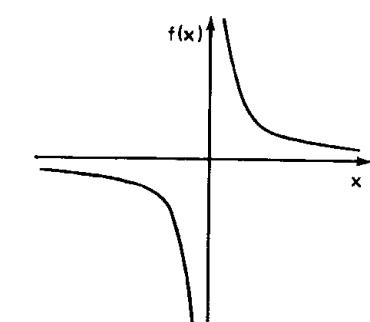
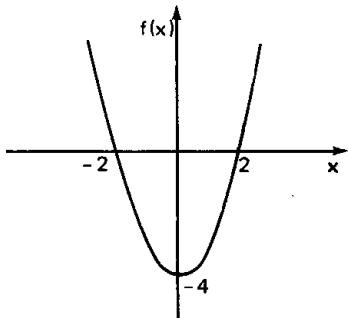
I) Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$.

Como $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$. De acordo com o teorema de Lagrange, existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, isto é, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_0)$.

Sendo $f'(x) \geqslant 0$ em $]a, b[$, decorre $f'(x_0) \geqslant 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, vem: $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, isto é: $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ e, portanto, f é crescente.

II) Analogamente.

Interpretação geométrica

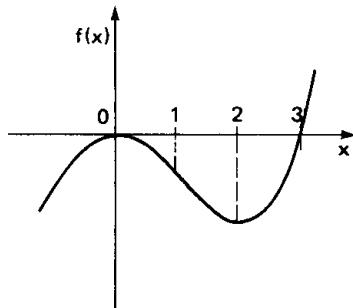
O teorema acaba de mostrar que:

I) Uma função f ser crescente em $[a, b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são não negativos.

II) Uma função f ser decrescente em $[a, b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são não positivos.

168. Exemplos

1º) A função $f(x) = 2$ é constante em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2º) A função $f(x) = x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3º) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente em qualquer intervalo que não contenha o zero. Sua derivada é

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

4º) A função $f(x) = x^2 - 4$ é decrescente em qualquer intervalo contido em $\mathbb{R}_-$ e crescente em qualquer intervalo de $\mathbb{R}_+$. Sua derivada é $f'(x) = 2x$ tal que:

$f'(x) \leqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}_-$
$f'(x) \geqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}_+$

5º) A função $f(x) = x^3 - 3x^2$ tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x$, então:

$x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2 \Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$
$0 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow f'(x) \leqslant 0$

portanto:

f é crescente $\iff x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$

f é decrescente $\iff 0 \leqslant x \leqslant 2$

EXERCÍCIOS

H.191 Determinar o conjunto dos valores de x para os quais a função $f(x) = x^2 - \log_e x$ é crescente.

Solução

Devemos calcular a derivada de f e determinar em que conjunto a função f' é não negativa. Temos:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x} \geqslant 0 \Longrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lembrando que $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, vem a resposta: f é crescente para $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

H.192 Determinar o conjunto dos valores de x para os quais cada função abaixo é *crescente*.

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 13$
$g(x) = 2 \cdot \cos x - x + 1$
$h(x) = \text{sen } x - \cos x$
$i(x) = \big| |x| - 1 \big|$

H.193 Para que valores de x é decrescente a função $f(x) = \big|2 \cdot |x| - 4\big|$?

Solução

Vamos definir f através de várias sentenças. Como primeiro passo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 4|, & \text{se } x \geqslant 0 \\ |-2x - 4|, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e finalmente vem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{se } x \geqslant 2 \\ -2x + 4, & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x + 4, & \text{se } -2 < x < 0 \\ -2x - 4, & \text{se } x \leqslant -2 \end{cases}$$

A derivada de f é, portanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ -2, & \text{se } 0 < x < 2 \text{ ou } x < -2 \end{cases}$$

e não é definida para $x = 0$ ou 2 ou -2.
Assim, f é decrescente para x pertencente ao conjunto $[0, 2] \cup]-\infty, -2]$.

H.194 Determinar o conjunto dos valores de x para os quais cada função abaixo é *decrescente*:

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1;$
$g(x) = e^x - x,$
$h(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1},$
$i(x) = \text{arc sen } x.$

Em cada um dos exercícios de H.195 a H.203, determinar os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que é decrescente.

H.195 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

H.196 $f(x) = x^4 + 4x$

H.197 $f(x) = x^5 - 5x^3 + 20x - 2$

H.198 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

H.199 $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

H.200 $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x - 1}$

H.201 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leqslant 2 \\ 7 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

H.202 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

H.203 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{se } x \leqslant 0 \\ x, & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 2x - x^3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

H.204 Estudar a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_e x + \log_e(x + 2)$, determinando os intervalos em que é crescente ou decrescente.

H.205 Descrever o crescimento e o decréscimo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x \leqslant 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

H.206 Descrever o crescimento e o decréscimo da função $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$.

H.207 Determinar para que valores de x é crescente ou decrescente a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{\cos x}$.

H.208 Provar que se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então a função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ é decrescente.

H.209 Provar que o polinômio $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1$ admite um único zero real.

Sugestão: calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e estudar $f'(x)$.

H.210 Esboçar o gráfico de uma função f para a qual são verificadas as seguintes hipóteses:

a) f é contínua em $\mathbb{R}$

b) $f(3) = 2$

c) $f'(x) = -1$ se $x < 3$
   $f'(x) = 1$ se $x > 3$

H.211 Provar que se f é uma função crescente em I, então $g = -f$ é decrescente em I.

Solução

Sejam $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$. Temos:

$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Longrightarrow -f(x_1) \geqslant -f(x_2) \Longrightarrow g(x_1) \geqslant g(x_2)$

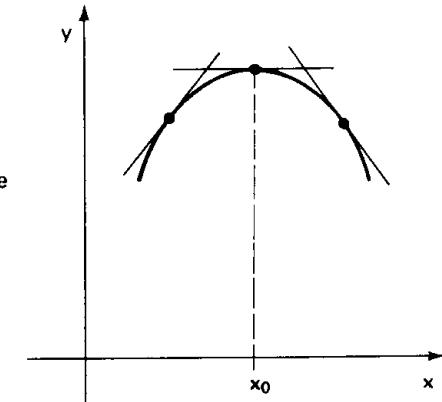
então g é decrescente em I.

H.212 Provar que se f é uma função crescente em I e h é definida em I pela lei $h(x) = \frac{1}{f(x)}$, então h é decrescente em I.

H.213 Provar que se f é crescente num intervalo I, g é crescente em I e existe $f \circ g$, então $f \circ g$ é crescente em I.

III. DETERMINAÇÃO DOS EXTREMANTES

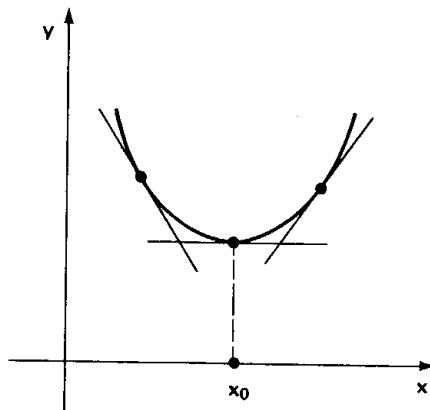
169. Dada uma função f, definida e derivável em $I =]a, b[$, o teorema de Fermat garante que os valores de x que anulam f', isto é, as raízes da equação $f'(x) = 0$ são possivelmente extremantes de f.

Assim, por exemplo, os possíveis extremantes da função $f(x) = x^4 - 4x^3$ são as raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$, isto é, 0 e 3. Em princípio, tanto 0 quanto 3 podem ser ponto de máximo ou ponto de mínimo ou não ser extremante. Com toda certeza nenhum número diferente desses dois é extremante por não anular f'. A questão agora é saber qual das alternativas é correta para 0 ou para 3.

170. Mais geralmente, dado um número $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$, como determinar se x_0 é ou não extremamente de f e ainda, sendo extremamente, como saber se x_0 é ponto de máximo ou de mínimo?

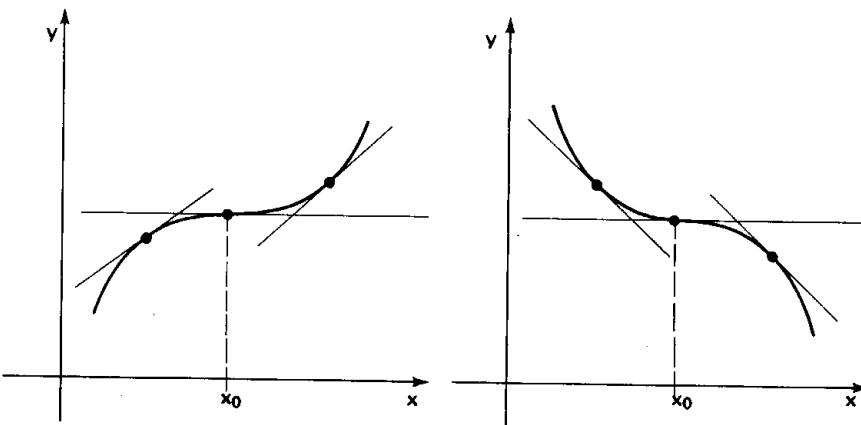
1ª resposta: x_0 é ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de x_0.

De fato, se existir uma vizinhança V de x_0 com a propriedade citada, temos para todo $x \in V$:

$$x < x_0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x) \text{ crescente} \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$x > x_0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x) \text{ decrescente} \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

e então, x_0 é um ponto de máximo local.

O gráfico ao lado mostra que, numa vizinhança de um ponto x_0 de máximo local, as retas tangentes à curva passam de coeficiente angular positivo (à esquerda de x_0) para negativo (à direita de x_0). E o coeficiente angular é justamente a derivada de f.

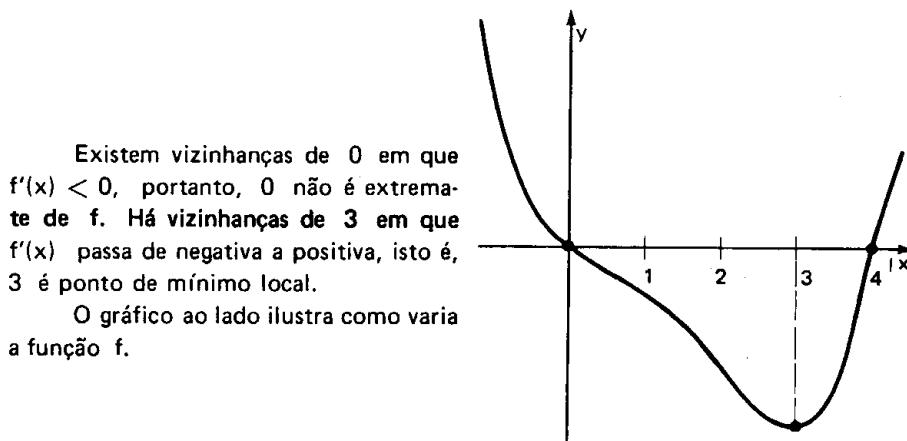
2ª resposta: x_0 é ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de x_0.

De fato, se existir uma vizinhança V de x_0 com a propriedade referida, temos para todo $x \in V$:

$x < x_0 \implies f'(x) < 0 \implies f(x)$ decrescente $\implies f(x) \geqslant f(x_0)$
$x > x_0 \implies f'(x) > 0 \implies f(x)$ crescente $\implies f(x) \geqslant f(x_0)$

e, então, x_0 é um ponto de mínimo local.

O gráfico ao lado mostra que, numa vizinhança de um ponto x_0 de mínimo local, as retas tangentes à curva passam de coeficiente angular negativo (à esquerda de x_0) para positivo (à direita de x_0).

3ª resposta: x_0 não é extremamente de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$ tem-se $f'(x)$ sempre com mesmo sinal.

A figura 1 mostra que se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$, então x_0 não é extremamente. A figura 2 mostra, analogamente, para o caso em que $f'(x) < 0$, que x_0 não é extremamente.

171. Exemplos

1º) Verificar se $f(x) = x^4 - 4x^3$ tem **extremante.**

Já vimos que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ tem raízes 0 e 3.

Analisemos a variação de sinal da função $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$:

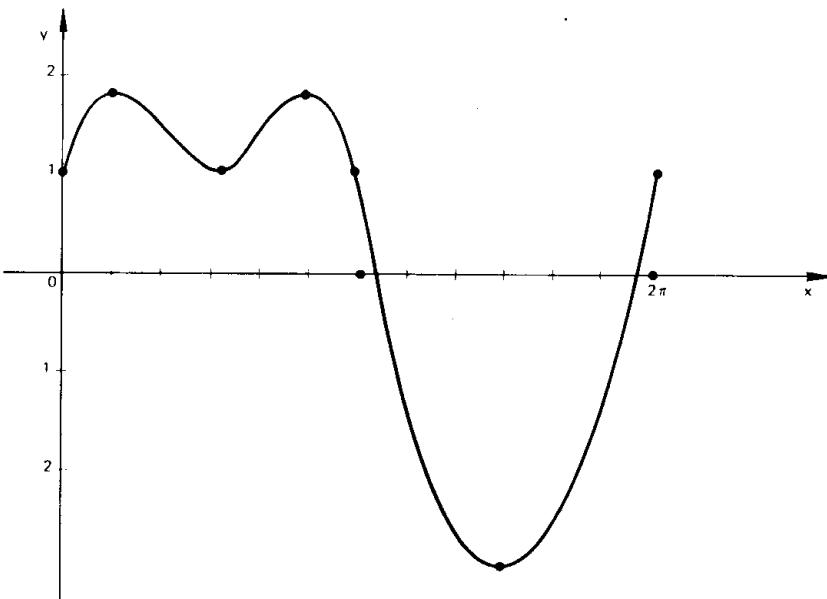
	0	3	x
x^2	+	+	+
$x-3$	−	−	+
$f'(x)$	−	−	+

Existem vizinhanças de 0 em que $f'(x) < 0$, portanto, 0 não é extremante de f. Há vizinhanças de 3 em que $f'(x)$ passa de negativa a positiva, isto é, 3 é ponto de mínimo local.

O gráfico ao lado ilustra como varia a função f.

2º) Quais são os extremantes da função $f:]0,2\pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \text{ sen } x + \cos 2x$?

Calculando a derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen } 2x = 2 \cdot \cos x - 4 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x =$$
$$= 2 \cdot \cos x \cdot (1 - 2 \cdot \text{sen } x)$$

Os valores de x que anulam $f'(x)$ são as raízes das equações $\cos x = 0$ e $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Analisando o sinal de $f'(x)$, temos:

	0	π/6	π/2	5π/6	3π/2	2π x
cos x	+	+	−	−	+	
1−2 sen x	+	−	−	+	+	
f'(x)	+	−	+	−	+	

Verificamos que $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são pontos de máximo local, enquanto $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos de mínimo local.

O gráfico da função f confirma nossa análise.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios H.214 a H.224, determine os extremantes da função f.

H.214 $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

H.215 $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$

H.216 $f(x) = x^3 - 27x + 1$

H.217 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

H.218 $f(x) = (x-8)^3 (x-6)^4$

H.219 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$

H.220 $f(x) = \cos 3x$

H.221 $f(x) = \text{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$

H.222 $f(x) = x \cdot \ell n\, x$

H.223 $f(x) = \ell n\,(x^2 + 1)$

H.224 $f(x) = e^{x^3 - 3x}$

H.225 Calcular o valor máximo assumido pela função $f(x) = e^{-(x-a)^2}$.

Solução

$f'(x) = -2(x-a) \cdot e^{-(x-a)^2}$

$f'(x) = 0 \implies -2(x-a) \cdot e^{-(x-a)^2} = 0 \implies x = a$

Como $e^{-(x-a)^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$x < a \implies x - a < 0 \implies f'(x) > 0$

$x > a \implies x - a > 0 \implies f'(x) < 0$

Assim $x = a$ é um ponto de máximo local de f. O valor máximo de f é: $f(a) = e^{-(a-a)^2} = e^0 = 1$.

Nos exercícios H.226 a H.231, calcule os valores extremos de f:

H.226 $f(x) = x^2 - 4x - 1$

H.227 $f(x) = x^4 + 8x$

H.228 $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

H.229 $f(x) = x^2 e^x$

H.230 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

H.231 $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

Nos exercícios H.232 a H.235 determinar as coordenadas dos pontos extremos da função f.

H.232 $f(x) = x^3 - 9x$

H.233 $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

H.234 $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

H.235 $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x^2}$

H.236 Calcular a e b de modo que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo em (1, 5).

H.237 Obter os extremos absolutos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$.

Solução

Como f é derivável em $[-2, \frac{1}{2}]$, apliquemos o teorema de Fermat:

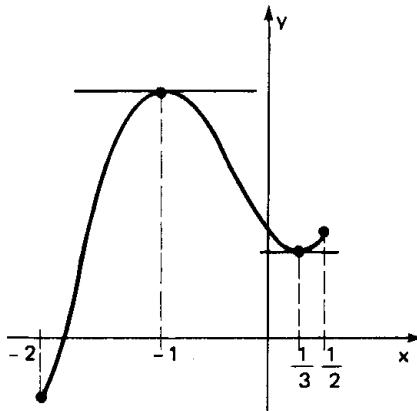
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ e os zeros de f' são os números -1 e $\frac{1}{3}$.

Analisando a variação de sinal de f', temos

então -1 é ponto de máximo interior e $1/3$ é ponto de mínimo interior. Calculemos o valor de f nesses pontos críticos e nos extremos do intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$:

$f(-2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1$, $f(-1) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$,

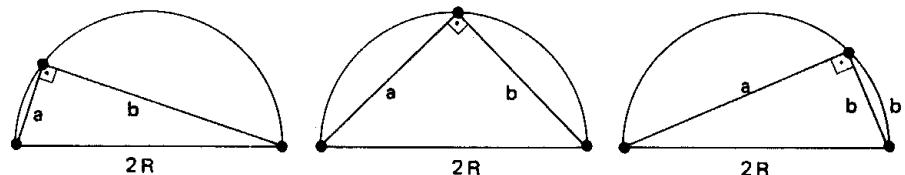
$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}$ e $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8}$

O valor máximo absoluto de f no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$ é o maior dos números $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(-1)$, portanto, é $f(-1) = 2$.

O valor mínimo absoluto de f no intervalo $[-2, \frac{1}{2}]$ é o menor dos números $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(\frac{1}{3})$, portanto, é $f(-2) = -1$.

O gráfico da função ilustra o exposto.

H.238 Obter os extremos absolutos de $f(x) = (x-2)^{2/3}$ no intervalo $[1, 5]$.

H.239 Dada a função $f(x) = \frac{1}{x-2}$, obter os extremos absolutos de f no intervalo $[2, 6]$.

H.240 Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (metros) em relação ao solo, é dada por $h = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$, onde t indica o número de segundos decorridos após o lançamento. Em que instante a pedra atingirá sua altura máxima?

H.241 Um móvel desloca-se sobre um eixo de modo que sua abscissa s no instante t é dada por $s = a \cdot \cos(kt + \ell)$, sendo a, k, ℓ constantes dadas.

Determinar:

a) instantes e posições em que é maxima a velocidade do móvel;
b) instantes e posições em que é mínima a aceleração do móvel.

H.242 Um triângulo está inscrito numa semi-circunferência de raio R. Seus lados medem a, b e 2R. Calcular a e b quando a área do triângulo é máxima.

Solução

Notemos primeiramente que numa semi-circunferência de raio R é possível inscrever diferentes triângulos, todos retângulos. Observemos que a e b, medidas dos catetos, variam de um triângulo para outro e percorrem o intervalo $]0, 2R[$, isto é, $0 < a < 2R$ e $0 < b < 2R$. Para um mesmo triângulo são verificadas as seguintes relações:

$$S = \frac{ab}{2} \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 = 4R^2$$

onde S é a área do triângulo.

Para determinarmos o máximo de S devemos colocar S como função de uma variável só (a ou b). Eliminando b, pois $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$$

Provemos que S tem um ponto de máximo:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8R^2a - 4a^3}{2\sqrt{4R^2a^2 - a^4}} = \frac{2R^2a - a^3}{\sqrt{4R^2a^2 - a^4}}$$

$S' = 0 \implies 2R^2a - a^3 = 0 \implies a = R\sqrt{2}$

$0 < a < R\sqrt{2} \implies a^2 < 2R^2 \implies a^3 < 2R^2a \implies S' > 0$

$R\sqrt{2} < a < 2R \implies 2R^2 < a^2 \implies 2R^2a < a^3 \implies S' < 0$

e, então, $a = R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo local.

Conclusão: o triângulo de área máxima é aquele em que $a = R\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$, isto é, é o triângulo isósceles.

H.243 Um retângulo de dimensões x e y tem perímetro $2a$ (a é constante dada). Determinar x e y para que sua área seja máxima.

H.244 Calcular o perímetro máximo de um trapézio que está inscrito numa semi-circunferência de raio R.

H.245 Calcular o raio da base e a altura do cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

Solução

A figura ao lado é uma secção da esfera e do cilindro inscrito, feita por um plano contendo o eixo de simetria do cilindro. Observemos que numa esfera podem ser inscritos diferentes cilindros, portanto, r e $\frac{h}{2}$ são variáveis. Para um dado cilindro são verificadas as seguintes condições:

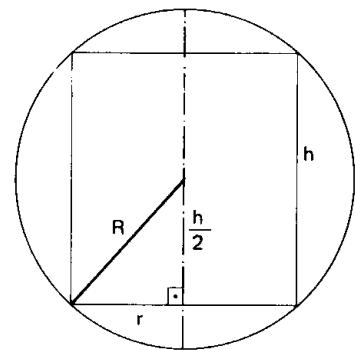
$V = \pi r^2 h,\ 0 < h < 2R$ e $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$

onde V é o volume do cilindro.

Para determinarmos o máximo de V devemos colocar V como função de uma variável só (r ou h). Eliminando r, pois $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, temos:

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Provemos que V tem um ponto de máximo:

$$V' = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

$$V' = 0 \Longrightarrow \frac{3\pi h^2}{4} = \pi R^2 \Longrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

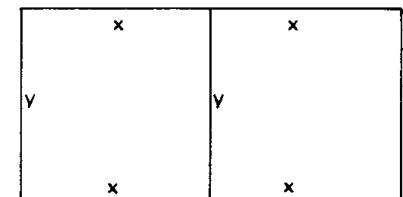
$$0 < h < \frac{2R}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h^2 < \frac{4R^2}{3} \Longrightarrow \frac{3\pi h^2}{4} < \pi R^2 \Longrightarrow V' > 0$$

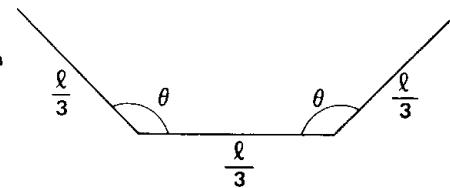
$$\frac{2R}{\sqrt{3}} < h < 2R \Longrightarrow h^2 > \frac{4R^2}{3} \Longrightarrow \frac{3\pi h^2}{4} < \pi R^2 \Longrightarrow V' < 0$$

e, então, $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ é um ponto de máximo local.

Conclusão: o cilindro de volume máximo é aquele em que $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ e $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

H.246 Calcular o raio da base e a altura do cone de área lateral máxima que é inscritível numa esfera de raio R.

H.247 Calcular o raio da base e altura do cone de volume mínimo que pode circunscrever uma esfera de raio R.

H.248 Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrado de 576 cm², cortando quadrados iguais nas quatro pontas e dobrando os lados. Calcular a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

H.249 Uma ilha está em um ponto A, a 10 km do ponto B mais próximo sobre uma praia reta. Um armazém está no ponto C, a 7 km de B sobre a praia. Se um homem pode remar à razão de 4 km/h e andar à razão de 5 km/h, aonde deveria desembarcar para ir da ilha ao armazém no menor tempo possível?

H.250 Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços, um dos quais formará um círculo e o outro, um quadrado. Como deve ser cortado o fio para que a soma das áreas do círculo e do quadrado seja máxima?

H.251 Um funil cônico tem raio r e altura h. Se o volume do funil é V (constante), calcular a razão r/h de modo que sua área lateral seja mínima.

H.252 Um fazendeiro precisa construir dois currais lado a lado, com uma cerca comum, conforme mostra a figura. Se cada curral deve ter uma certa área A, qual o comprimento mínimo que a cerca deve ter?

H.253 Uma calha de fundo plano e lados igualmente inclinados vai ser construída dobrando-se uma folha de metal de largura ℓ. Se os lados e o fundo têm largura $\ell/3$, calcular o ângulo θ de forma que a calha tenha a máxima secção reta.

172. Um outro processo, para determinar se uma raiz x_0 da equação $f'(x) = 0$ é extremamente da função f, consiste em estudar o sinal da derivada segunda de f no ponto x_0. O teorema seguinte explica o processo.

173. Teorema

Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I =]a, b[$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nestas condições, temos:

a) se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;
b) se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

Demonstração

a) se $f''(x_0) < 0$ e f'' é contínua, existe uma vizinhança V de x_0 na qual $f''(x) < 0, \ \forall x \in V$.

Se $f''(x) < 0$, então f' é decrescente em V, portanto, como $f'(x_0) = 0$ decorre que em V, à esquerda de x_0 temos $f'(x) > 0$ e à direita de x_0 temos $f'(x) < 0$. Concluímos assim que x_0 é ponto de máximo local.

b) Prova-se analogamente.

174. Exemplos

1º) Determinar os extremantes de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Longrightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x$$

As raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$ são 0 e 3. Substituindo esses números em $f''(x)$, vem:

$f''(0) = 0 \Longrightarrow$ nada se conclui sobre 0.

$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0 \Longrightarrow 3$ é ponto de mínimo.

2º) Achar os extremantes de $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\, x + \cos 2x$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = 2 \cdot \text{sen}\, x + \cos 2x \Longrightarrow f'(x) = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen}\, 2x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f''(x) = -2 \cdot \text{sen}\, x - 4 \cdot \cos 2x$$

As raízes de $f'(x) = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen}\, 2x = 0$ são $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$ e $3\pi/2$. Testando cada uma em $f''(x)$, temos:

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6} - 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = -1 - 2 = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} - 4 \cdot \cos\pi = -2 + 4 = 2 > 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6} - 4 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} = -1 -2 = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} - 4 \cdot \cos 3\pi = +2 + 4 = 6 > 0$$

então $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são pontos de máximo e $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos de mínimo.

175. Observação

Devemos observar, nas condições do último teorema, que se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, nada pode ser concluído sobre x_0. Um teorema mais geral que o anterior estabelece finalmente um critério para pesquisar máximos e mínimos locais sem chegar a impasse.

176. Critério geral para pesquisar extremantes

Seja f uma função derivável com derivadas sucessivas também deriváveis em $I =]a, b[$. Seja $x_0 \in I$ tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Nestas condições, temos:

I) se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;

II) se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f;

III) se n é ímpar, então x_0 não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f.

A demonstração deste teorema não cabe num curso deste nível.

177. Exemplo

Pesquisemos os extremantes da função $f(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 1$

Calculando as sucessivas derivadas de f, temos:

$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x = x(x - 1)^2(5x - 2)$

$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 18x - 2 = (x - 1)(20x^2 - 16x + 2)$

$f'''(x) = 60x^2 - 72x + 18$

$f''''(x) = 120x - 72$

$f^{(v)}(x) = 120$

$f^{(n)}(x) = 0$, para todo $n > 5$.

As raízes de $f'(x) = 0$ são 0, 1 e 2/5.

Temos ainda:

$f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2 < 0$

$f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$ e $f'''(1) = 6 \neq 0$

$f'\left(\frac{2}{5}\right) = 0$ e $f''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{18}{25} > 0$

portanto: 0 é ponto de máximo, $\frac{2}{5}$ é ponto de mínimo e 1 não é ponto de máximo nem de mínimo.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios H.254 a H.259 determine os extremantes da função f, utilizando o critério da segunda derivada.

H.254 $f(x) = x(x-2)^3$

H.255 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

H.256 $f(x) = x^2e^x$

H.257 $f(x) = e^x + e^{-x}$

H.258 $f(x) = \log_e(1+x^2)$

H.259 $f(x) = (x-1)^{2/3}$

H.260 Calcular as coordenadas dos pontos extremos do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\ell n \frac{x}{2}}{(\ell n\, x)^2}.$$

H.261 Dada a função $f(x) = -(x-1)^2$, determinar os extremos absolutos de f no intervalo $[-2, 3]$.

H.262 Obter os extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 4x + 8$ em $[-1, 3]$.

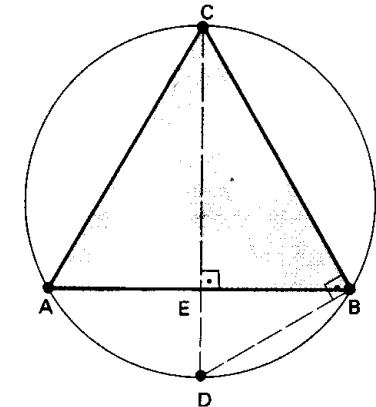
H.263 Dada a função f tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

determinar os extremos absolutos de f em $[-6, 5]$.

H.264 Achar o ponto P_0 situado sobre a hipérbole de equação $xy = 1$ e que está mais próximo da origem.

Solução

Seja $P_0 = (x, y)$. A distância de P_0 à origem é $d = \sqrt{x^2+y^2}$. Estando P_0 sobre a hipérbole, $y = \frac{1}{x}$ e, então, $d = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$. Calculemos x para que d seja mínima.

$$d' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + \frac{1}{x^2})^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2 \cdot x^{-3}) = \frac{x - \frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$d' = 0 \implies x - \frac{1}{x^3} = 0 \implies x^4 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

e, portanto, $P_0 = (1, 1)$ ou $P_0 = (-1, -1)$.

H.265 Achar o ponto da curva $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 20$ que está a distância mínima do ponto $(-2, -4)$.

H.266 Um triângulo isósceles de base a está inscrito numa circunferência de raio R. Calcular a de modo que seja máxima a área do triângulo.

Solução

Seja ABC o triângulo isósceles de base $a = AB$ e altura $h = CE$. Sua área é dada pela fórmula

$$S = \frac{1}{2}ah$$

No triângulo retângulo BCD, a altura BE é média geométrica entre os segmentos que determina hipotenusa CD, então:

$$(BE)^2 = (EC)(ED) \implies \frac{a^2}{4} = h \cdot (2R - h) \implies a = 2\sqrt{2Rh - h^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah = h\sqrt{2Rh - h^2} = \sqrt{2Rh^3 - h^4}$$

Procuremos o valor máximo de S para $0 < h < 2R$:

$$S' = \frac{6Rh^2 - 4h^3}{2\sqrt{2Rh^3 - h^4}} = \frac{3Rh^2 - 2h^3}{\sqrt{2Rh^3 - h^4}}$$

$$S' = 0 \implies 3Rh^2 - 2h^3 = 0 \implies h = \frac{3R}{2}$$

Como $S = 0$ para $h = 0$ ou $h = 2R$ e

$h = \frac{3R}{2} \implies S = \sqrt{2R\,\frac{27R^3}{8} - \frac{81R^4}{16}} = \sqrt{\frac{27R^4}{16}} = \frac{3\sqrt{3}\ R^2}{4}$

então $h = \frac{3R}{2}$ é ponto de máximo para S e, neste caso,

$a = 2\sqrt{2R \cdot \frac{3R}{2} - \frac{9R^2}{4}} = R\sqrt{3}$

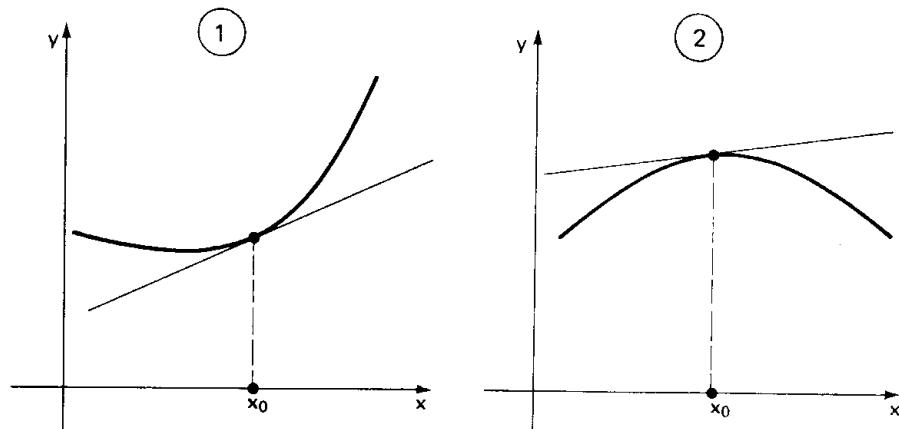
H.267 Calcular o raio da base e a altura do cone de máximo volume que se pode inscrever numa esfera de raio R.

H.268 Determinar as dimensões do cone de área total mínima que pode circunscrever uma esfera de raio R.

H.269 Um fabricante de caixas pretende produzir caixas com tampa de um certo volume V, cuja base é um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcular as dimensões mais econômicas que deve usar.

H.270 Uma página para impressão deve conter $300\ cm^2$ de área impressa, uma margem de $2\ cm$ nas partes superior e inferior e uma margem de $1{,}5\ cm$ nas laterais. Quais são as dimensões da página de menor área que preenche essas condições?

H.271 Um fazendeiro tem *80* porcos, pesando *150 kg* cada um. Cada porco aumenta de peso na proporção de *2,5 kg* por dia. Gastam-se Cr$ 2,00 por dia para manter um porco. Se o preço de venda está a Cr$ 3,00 por *kg* e cai Cr$ 0,03 por dia, quantos dias deve o fazendeiro aguardar para que seu lucro seja máximo?

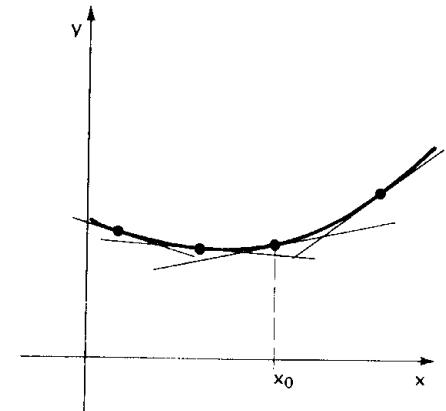
H.272 O custo de produção de x unidades de uma certa mercadoria é $a + bx$ e o preço de venda é $c - dx$ por unidade, sendo a, b, c, d constantes positivas. Quantas unidades devem ser produzidas e vendidas para que seja máximo o lucro da operação?

IV. CONCAVIDADE

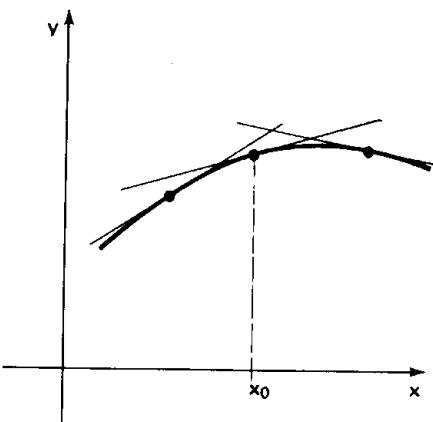
178. Definição

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in\ ]a, b[$. Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade positiva* em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0.

Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0, dizemos que o gráfico de f tem *concavidade negativa.*

Nos gráficos seguintes, a figura 1 mostra o gráfico de uma função que tem concavidade positiva em x_0, enquanto a figura 2 ilustra uma concavidade negativa em x_0.

Um critério para determinar se um gráfico tem concavidade positiva ou negativa em x_0 é dado pelo seguinte teorema.

179. Teorema

Se f é uma função derivável até segunda ordem no intervalo $I = [a, b]$, x_0 é interno a $[a, b]$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:

a) quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem concavidade positiva em x_0;

b) quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f tem concavidade negativa em x_0.

Apenas mostraremos geometricamente que o teorema é válido.

Se $f''(x_0) > 0$, então f' é crescente nas vizinhanças de x_0, portanto, as tangentes ao gráfico têm inclinação crescente e isto só possível sendo positiva a concavidade.

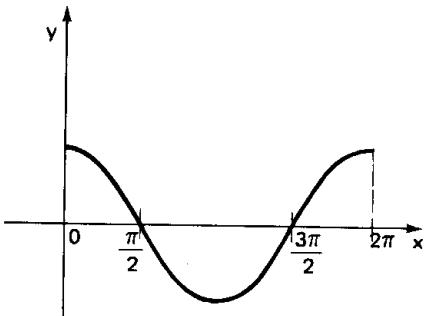
Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, então f' é decrescente nas vizinhanças de x_0, isto é, as retas tangentes à curva têm inclinação decrescente, portanto, a concavidade é negativa.

180. Exemplos

1º) Como é a concavidade do gráfico da função $f(x) = \cos x$, para $x \in [0, 2\pi]$?

Temos $f'(x) = -\text{sen}\, x$ e $f''(x) = -\cos x$.

Notando que:

$$f''(x) < 0 \iff -\cos x < 0 \iff 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$$

$$f''(x) > 0 \iff -\cos x > 0 \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

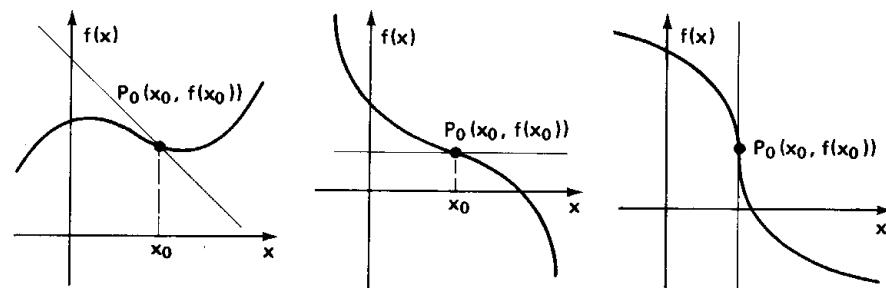
Concluímos que nos intervalos $[0, \frac{\pi}{2}[$ e $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ a curva tem concavidade negativa e no intervalo $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ a concavidade é positiva. Confira com o gráfico ao lado.

2º) Como é a concavidade da curva $y = x^4 - 4x^3$?

$y = x^4 - 4x^3 \implies y' = 4x^3 - 12x^2 \implies y'' = 12x^2 - 24x$

Notando que $y'' = 12 \cdot x \cdot (x - 2)$, temos:

$x < 0$ ou $x > 2 \implies y'' > 0 \implies$ concavidade positiva.

$0 < x < 2 \implies y'' < 0 \implies$ concavidade negativa.

Confira com o gráfico do item 171.

V. PONTO DE INFLEXÃO

181. Definição

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que $P_0(x_0, f(x_0))$ é um *ponto de inflexão* do gráfico de f se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que nos pontos do gráfico f para $x \in V$ e $x < x_0$ a concavidade tem sempre o mesmo sinal, que é contrário ao sinal da concavidade nos pontos do gráfico para $x > x_0$.

Em outros termos, P_0 é ponto de inflexão quando P_0 é ponto em que a concavidade "troca de sinal". Eis alguns exemplos:

Retomando os exemplos do item 180, vemos que os pontos de inflexão de $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ são os pontos de abscissas $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$; os pontos de inflexão da curva $y = x^4 - 4x^3$ são os de abscissas 0 e 2.

Os seguintes teoremas permitem localizar os pontos de inflexão no gráfico de uma função.

182. Teorema

Seja f é uma função com derivadas até terceira ordem em $I = [a, b]$. Seja $x_0 \in]a, b[$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abscissa de um ponto de inflexão.

Demonstração

Suponhamos, por exemplo, $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$. De acordo com o teorema do item 173, x_0 é ponto de mínimo local da função f'. Assim sendo, existe uma vizinhança V de x_0 tal que:

$(x \in V$ e $x < x_0) \implies f''(x_0) < 0$

$(x \in V$ e $x > x_0) \implies f''(x_0) > 0$

isto é, em x_0 a função f'' "troca de sinal", ou ainda, em $P_0(x_0, f(x_0))$ a concavidade do gráfico de f troca de sinal, portanto, x_0 é abscissa de um ponto de inflexão.

183. Teorema

Se f é uma função derivável até segunda ordem em $I = [a, b]$, $x_0 \in]a, b[$ e x_0 é abscissa de ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x_0) = 0$.

Demonstração

Suponhamos $f''(x_0) \neq 0$; por exemplo, admitamos $f''(x_0) > 0$. Temos:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

então existe uma vizinhança V de x_0 tal que $\dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, $\forall x \in V$, $x \neq x_0$.

Assim, em V, a função f' é crescente, portanto, em V o gráfico de f tem concavidade sempre positiva, isto é, em $P_0(x_0, f(x_0))$ a concavidade não troca de sinal e P_0 deixa de ser ponto de inflexão.

184. Observações

Este último teorema mostra que uma condição necessária para x_0 ser a abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de f é anular f''. Entretanto, nem todas as raízes de $f''(x) = 0$ são abscissas de pontos de inflexão. Se uma raiz x_0 de $f''(x) = 0$ não anular f''', o teorema do item 182 garante que x_0 é abscissa de ponto de inflexão. Se, porém, $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, nada podemos concluir, usando a teoria dada.

185. Exemplo

Determinar os pontos de inflexão do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 5$.

Temos:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 12$

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$

As raízes da equação $f''(x) = 0$, isto é, $12x^2 - 12x - 24 = 0$ são 2 e -1.

Notando que $f'''(x) = 24x - 12$, vemos que:

$$f'''(2) = 48 - 12 = 36 \neq 0 \quad \text{e} \quad f'''(-1) = -24 - 12 = -36 \neq 0$$

portanto, 2 e -1 são abscissas de pontos de inflexão e esses pontos são:

$$P = (2, f(2)) = (2, -29) \quad \text{e} \quad Q = (-1, f(-1)) = (-1, -26)$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios H.273 a H.277 determinar onde o gráfico da função dada tem concavidade positiva, onde a concavidade é negativa e obter os pontos de inflexão, caso existam.

H.273 $f(x) = x^3 + 9x$

H.274 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

H.275 $f(x) = \sqrt[5]{x - 2}$

H.276 $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[2]{(x^2 + 4)^3}}$

H.277 $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ para } x < 1 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 3, \text{ para } x \geq 1 \end{cases}$

H.278 Determinar os intervalos em que x deve estar para que o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x - \cos x$ tenha concavidade positiva.

H.279 Determinar as abscissas dos pontos do gráfico da função $f(x) = x^5 - x^4$ nos quais a concavidade é negativa.

H.280 Quais são os pontos de inflexão no gráfico da função $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$?

Nos exercícios H.281 a H.283, supondo que f é contínua em algum intervalo aberto que contém c, faça uma parte do gráfico de f numa vizinhança de c de modo que fiquem satisfeitas as condições dadas.

H.281 Para $x > c$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ e
para $x < c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$

H.282 Para $x > c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ e
para $x < c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$

H.283 $f'(c) = f''(c) = 0$ e $f''(x) > 0$ para $x < c$ ou $x > c$.

H.284 Esboçar o gráfico de uma função f tal que, para todo x real, tenhamos $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$.

H.285 Esboçar o gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são positivas, $\forall x \in \mathbb{R}$.

H.286 Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, determinar a_0, a_1, a_2 e a_3 de modo que f tenha um extremo relativo em $(0, 3)$ e um ponto de inflexão em $(1, -1)$.

H.287 Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, calcular a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 de modo que o gráfico de f passe pela origem, seja simétrico em relação ao eixo y e tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$.

VI. VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

186. Um dos objetivos da teoria deste capítulo é possibilitar um estudo da variação de uma função f. Para caracterizar como varia uma função f procuramos determinar:

a) o domínio,
b) a paridade,
c) os pontos de descontinuidade;
d) as intersecções do gráfico com os eixos x e y;
e) o comportamento no infinito;
f) o crescimento ou decréscimo;
g) os extremantes;
h) os pontos de inflexão e a concavidade;
i) o gráfico.

187. Exemplos

1º) Estudar a variação da função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.

a) Seu domínio é $\mathbb{R}$.

b) A função não é par nem impar pois:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 5(-x) = -x^3 + x^2 + 5x$$

não é idêntica a $f(x)$ nem a $-f(x)$.

c) A função polinomial f é contínua em $\mathbb{R}$.

d) Fazendo $x = 0$ temos $f(0) = 0$.

Fazendo $f(x) = 0$ temos $x^3 + x^2 - 5x = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ ou $x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

As intersecções com os eixos são os pontos $(0, 0)$; $\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}, 0\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

f) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 3(x-1)\left(x + \dfrac{5}{3}\right)$

então:

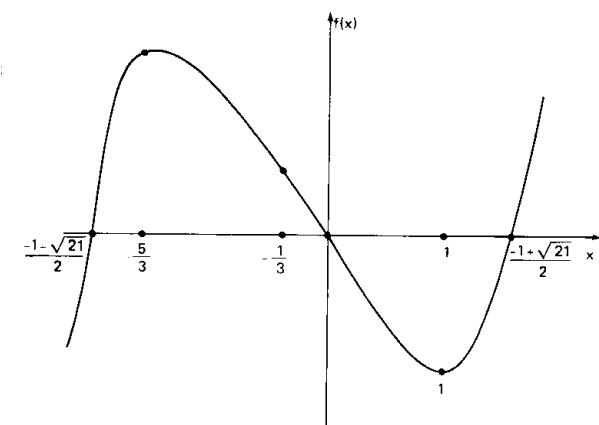
$$x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \implies f'(x) \geqslant 0 \implies f \text{ crescente}$$

$$-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 1 \implies f'(x) \leqslant 0 \implies f \text{ decrescente}$$

g) $f'(x) = 0 \implies x = 1$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

$$f''(x) = 6x + 2 \implies \begin{cases} f''(1) = 8 > 0 \\ f''\left(-\dfrac{5}{3}\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

então f tem um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $x = -\dfrac{5}{3}$

h) $f''(x) = 6x + 2$, então:

$$x < -\frac{1}{3} \implies f''(x) < 0 \implies \text{concavidade negativa}$$

$$x > -\frac{1}{3} \implies f''(x) > 0 \implies \text{concavidade positiva}$$

Como o sinal da concavidade muda em $x = -\dfrac{1}{3}$, o gráfico tem um ponto de inflexão em $-\dfrac{1}{3}$.

i) gráfico de f:

2º) Estudar a variação da função $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

a) Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

b) A função não é par nem ímpar pois:

$f(-x) = \frac{-x-1}{2(-x)-5}$ não é idêntica a $f(x)$ nem a $-f(x)$.

c) Como $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 2x - 5$ são contínuas, $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio. Notemos que $\lim_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty$.

d) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = \frac{0-1}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{1}{5}$.

Fazendo $f(x) = 0$, temos $\frac{x-1}{2x-5} = 0$, isto é, $x = 1$.

As intersecções com os eixos são os pontos $(0, \frac{1}{5})$ e $(1, 0)$.

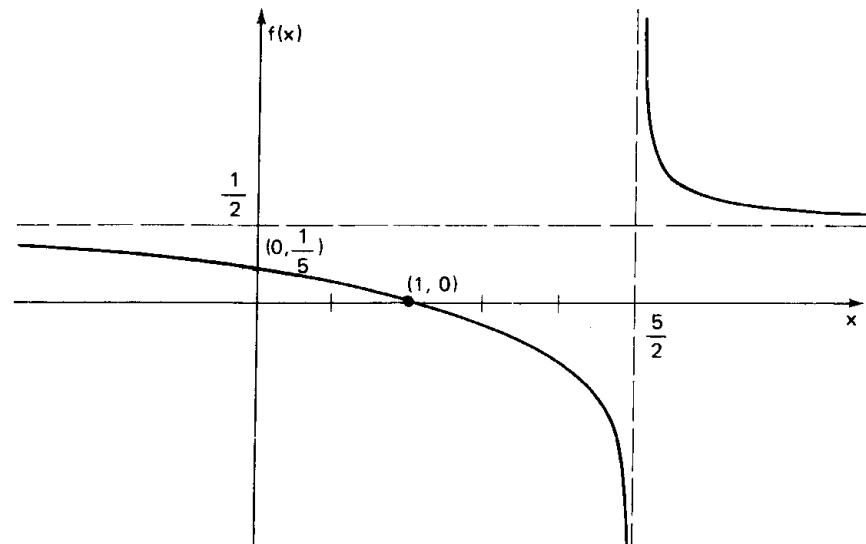
e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$ e

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (analogamente)

f) $f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-5) - (x-1) \cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{-3}{(2x-5)^2} < 0, \forall x \neq \frac{5}{2}$

então f é decrescente em todo intervalo que não contenha $\frac{5}{2}$.

g) f é derivável em seu domínio e f' nunca se anula, então f não tem extremantes.

h) $f''(x) = \frac{12}{(2x-5)^3}$

então:

$x < \frac{5}{2} \implies 2x - 5 < 0 \implies f''(x) < 0 \implies$ concavidade negativa

$x > \frac{5}{2} \implies 2x - 5 > 0 \implies f''(x) > 0 \implies$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda no ponto de abscissa $\frac{5}{2}$ (em que f não é definida), concluímos que o gráfico de f não tem ponto de inflexão.

i) gráfico de f:

EXERCÍCIOS

Nos exercícios H.288 a H.297 determinar o domínio, a paridade, os pontos de descontinuidade, as intersecções do gráfico com os eixos, o comportamento no infinito, o crescimento ou decrescimento, os extremantes, a concavidade, os pontos de inflexão e o gráfico de f.

H.288 $f(x) = 2x^3 - 6x$

H.289 $f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 1$

H.290 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

H.291 $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$

H.292 $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

H.293 $f(x) = x^{1/3} + 2 \cdot x^{4/3}$

H.294 $f(x) = 1 + (x-2)^{1/3}$

H.295 $f(x) = x\sqrt{1-x}$

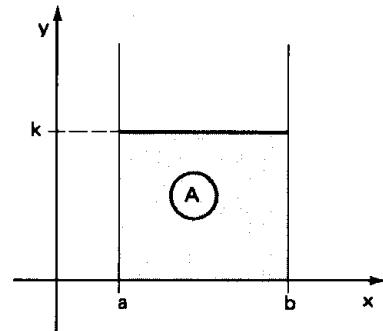
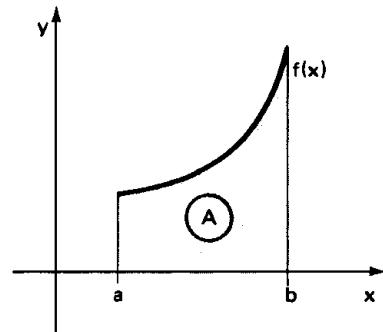
H.296 $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

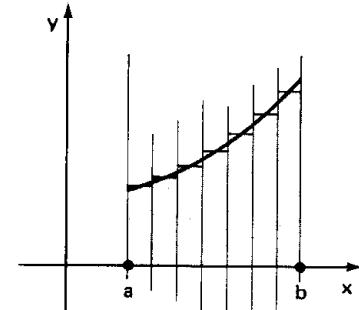
H.297 $f(x) = \frac{9x}{x^2+9}$

CAPÍTULO IX

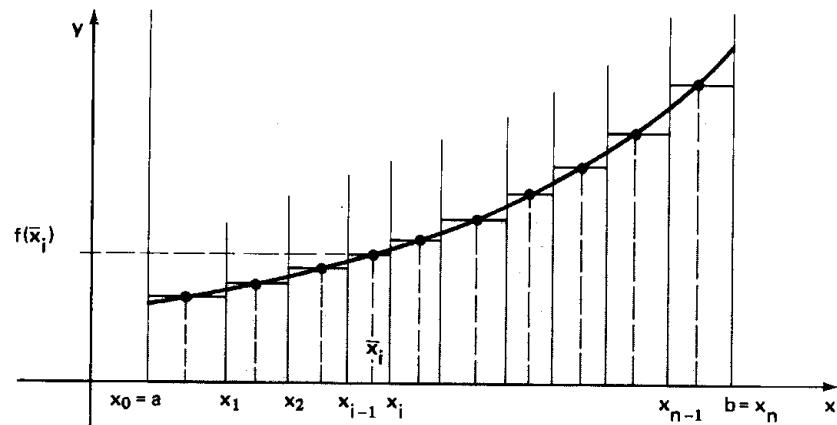
NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL

I. INTRODUÇÃO – ÁREA

188. Historicamente, foi da necessidade de calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta que brotou a noção de integral.

Por exemplo, consideremos o problema de calcular a área A da região sob o gráfico da função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $f(x) \geqslant 0$ (ver figura).

Admitindo conhecida uma noção intuitiva de área de uma figura plana, e ainda, que a área de um retângulo de base b e altura h é $b \cdot h$, vamos descrever um processo para determinar a área A.

Se $f(x)$ fosse constante e igual a k em $[a, b]$, a área procurada seria a área de um retângulo e teríamos:

$$A = k \cdot (b - a)$$

Não sendo $f(x)$ constante, dividimos o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos suficientemente pequenos para que neles $f(x)$ possa ser considerada constante com uma boa aproximação.

Em cada sub-intervalo podemos calcular, aproximadamente, a área sob o gráfico, calculando a área do pequeno retângulo que fica determinado quando supomos $f(x)$ constante; a área procurada será, aproximadamente, a soma das áreas destes retângulos.

Vamos descrever mais precisamente o procedimento acima relatado. A divisão de $[a, b]$ em sub-intervalos é feita intercalando-se pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre a e b como segue:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Os n sub-intervalos em que $[a, b]$ fica dividido têm comprimentos $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Escolhemos $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e supomos $f(x)$ constante e igual a $f(\bar{x}_i)$ em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Graficamente, temos:

A área A é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos, e escrevemos:

$$A \cong f(\bar{x}_1)\Delta_1 x + f(\bar{x}_2)\Delta_2 x + \ldots + f(\bar{x}_i)\Delta_i x + \ldots + f(\bar{x}_n)\Delta_n x$$

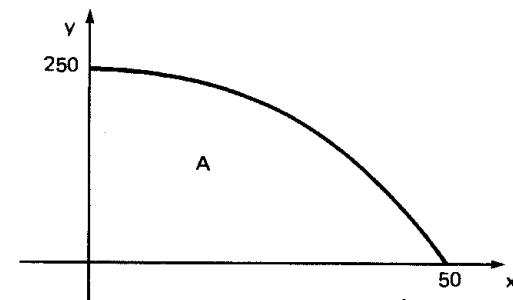
ou seja:

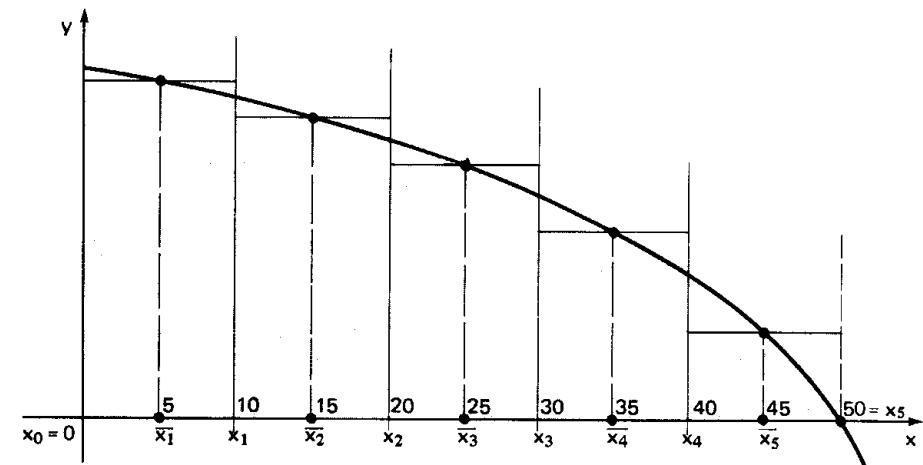
$$\boxed{A \cong \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x}$$

A soma que aparece no 2º membro das igualdades anteriores se aproxima mais e mais da área procurada à medida em que dividimos mais e mais [a, b], não deixando nenhum sub-intervalo grande demais.

189. De um modo geral, se f é uma função contínua definida em [a, b], o número do qual as somas $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ se aproximam arbitrariamente à medida em que todos os $\Delta_i x$ se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em [a, b] e é representado por $\int_a^b f(x)dx$. Assim, podemos dizer que, sendo $\Delta_i x$ pequeno, i = 1, 2, ... n, temos a igualdade aproximada:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$$

No caso da área A que estávamos calculando, podemos escrever:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

190. Em muitas outras situações não diretamente ligadas ao cálculo de áreas, somos levados através de um raciocínio semelhante ao exposto acima, a considerar uma função f definida em [a, b], subdividir [a, b], formar somas do tipo $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ e determinar o número de que tais somas se aproximam à medida em que os $\Delta_i x$ diminuem, ou seja, somos levados a um *processo de integração.* Estabelecer a noção de integral desta forma geral é o que pretendemos a partir do próximo item.

EXERCÍCIOS

H.298 Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de $f(x) = 250 - \frac{x^2}{10}$, $0 \leqslant x \leqslant 50$, dividindo o intervalo [0, 50] em sub-intervalos de comprimento 10.

Solução

Façamos $x_0 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $x_5 = 50$ e escolhamos, por exemplo, $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 15$, $\bar{x}_3 = 25$, $\bar{x}_4 = 35$ e $\bar{x}_5 = 45$.
Graficamente, temos:

A área A terá o valor aproximado:

$$A \cong f(\bar{x}_1)\Delta_1 x + f(\bar{x}_2)\Delta_2 x + f(\bar{x}_3)\Delta_3 x + f(\bar{x}_4)\Delta_4 x + f(\bar{x}_5)\Delta_5 x$$

Efetuando os cálculos, resulta:

$$A \cong 8375$$

O valor correto, conforme veremos, é $8\,333\frac{1}{3}$, sendo o erro cometido da ordem de 0,5%, apesar do número de subdivisões ser tão pequeno.

H.299 Obtenha uma estimativa da área sob o gráfico da função $f(x) = \frac{200}{x}$, $x \in [10, 50]$ dividindo o intervalo em 4 sub-intervalos de comprimento 10. (O valor correto das áreas procurada é 321,9).

II. A INTEGRAL DEFINIDA

Vamos agora estabelecer de um modo geral a noção de integral de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$.

191. PARTIÇÃO

Uma *partição* de $[a, b]$ é um conjunto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n\}$ com $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, ... n$ e

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

192. Norma

Chamamos *norma* da partição $\mathcal{P}$ o número μ, máximo do conjunto $\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, ..., \Delta_i x, ..., \Delta_n x\}$ onde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ... n$

193. Soma de Riemann

Sendo $\bar{x}_i$ escolhido arbitrariamente no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ... n$, a soma $f(\bar{x}_1)\Delta_1 x + f(\bar{x}_2)\Delta_2 x + ... + f(\bar{x}_i)\Delta_i x + ... + f(\bar{x}_n)\Delta_n x$

ou seja, $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ se chama *soma de Riemann* de f em $[a, b]$ relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha feita dos $\bar{x}_i$. .

194. Função Integrável

Sob certas condições bem gerais, que estabeleceremos a seguir, as somas de Riemann se aproximam arbitrariamente de um número fixo I, quando a norma μ da partição $\mathcal{P}$ se torna cada vez menor, independentemente das escolhas dos x_i.

Quando isto ocorre, dizemos que a função *f é integrável em* $[a, b]$ e I é a integral de f em $[a, b]$.

Precisamente, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existe um número real I satisfazendo à seguinte condição:

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda partição $\mathcal{P}$ com norma $\mu < \delta$ temos $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x - I\right| < \epsilon$, qualquer que seja a escolha dos $\bar{x}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$.

195. Integral

Sendo f integrável em $[a, b]$, o número I é chamado *integral* de f em $[a, b]$ (ou *integral definida* de f em $[a, b]$) e é representado por $\int_a^b f(x)dx$; resulta que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu < \delta \Longrightarrow \left|\Sigma f(\bar{x}_i)\Delta_i x - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon$$

Vamos, agora, estabelecer uma condição geral de integrabilidade.

196. Teorema 1

Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

A demonstração deste teorema está além dos objetivos destas noções iniciais e deixaremos de apresentá-la. Ela pode ser encontrada, por exemplo, no livro Cálculo e Álgebra Linear, Kaplan – Lewis – Vol. 1, Cap. 4.26, Livros Técnicos e Cient. Edit.

EXERCÍCIOS

H.300 Calcule, pela definição, a integral de $f(x) = 5x + 7$ em $[1, 5]$.

Solução

Devemos calcular $\int_1^5 (5x + 7)dx$. Como a função $f(x) = 5x + 7$ é contínua em $[1, 5]$, sabemos pelo Teorema 1 que a integral existe. Dividindo $[1, 5]$ em n sub-intervalos iguais de comprimento $\frac{4}{n}$, temos:

$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{4}{n},\ x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{4}{n},\ \ldots,\ x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{4}{n},$

$x_i = 1 + i \cdot \frac{4}{n},\ \ldots,\ x_n = 5$

Escolhendo, por exemplo, em cada sub-intervalo, $\bar{x_i}$ como sendo o ponto médio, resulta:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{1 + \frac{4}{n}(i-1) + 1 + \frac{4}{n}i}{2} = 1 + \frac{4}{n}i - \frac{2}{n}$$

Segue que $f(\bar{x}_i) = 5\bar{x}_i + 7 = 12 + \frac{20}{n}i - \frac{10}{n}$,

$f(\bar{x}_i)\Delta_i x = (12 + \frac{20}{n}i - \frac{10}{n})\frac{4}{n}$, ou seja,

$f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \frac{48}{n} - \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2}i$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}(\frac{48}{n} - \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2}i) = n \cdot \frac{48}{n} - n \cdot \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= 48 - \frac{40}{n} + \frac{80}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Como $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, resulta que

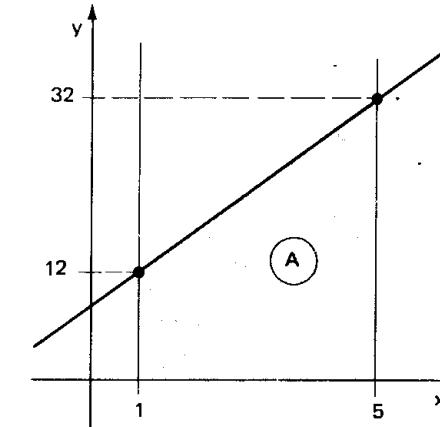
$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x = 48 - \frac{40}{n} + \frac{80}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 48 - \frac{40}{n} + 40 \cdot (\frac{n+1}{n})$$

Como $\Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots = \Delta_i x = \ldots = \Delta_n x = \frac{4}{n}$, a norma μ será igual a $\frac{4}{n}$; logo, quando μ se aproxima de zero, temos:

1) n cresce arbitrariamente

2) $\frac{40}{n}$ se aproxima de zero

3) $\frac{n+1}{n}$ se aproxima de 1

4) $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ se aproxima arbitrariamente do número $48 - 0 + 40.1$

ou seja,

$$\mu \cong 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x \cong 88$$

Temos, então:

$$\boxed{\int_1^5 (5x + 7)dx = 88}$$

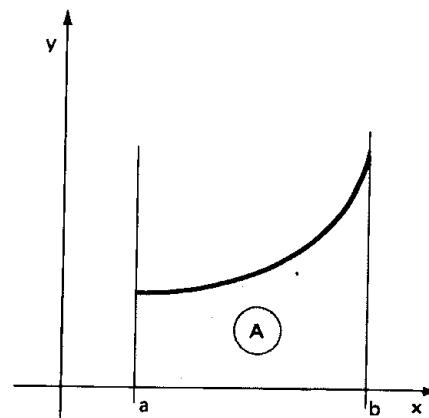
De fato, calculando a área sob o gráfico de $f(x) = 5x + 7$ entre $x = 1$ e $x = 5$, Temos:

$$A = (\frac{12 + 32}{2}) \cdot 4 = 88$$

H.301 Calcule, pela definição, conforme o exercício H.300, $\int_1^5 (5x + 7)dx$, escolhendo em cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto $\bar{x}_i$ tal que

a) $\bar{x}_i = x_{i-1}$

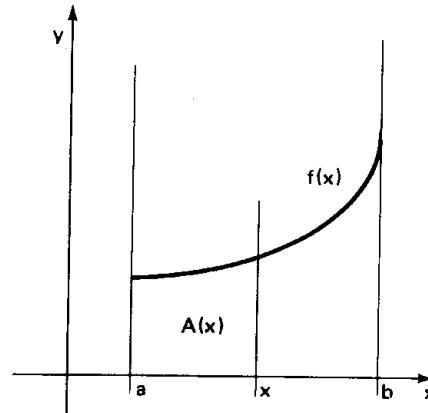
b) $\bar{x}_i = x_i$

H.302 Calcule, pela definição, conforme o exercício H.300, $\int_3^6 x^2dx$.

Dado: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

III. O CÁLCULO DA INTEGRAL

197. Vamos agora procurar um processo para calcular a integral de f em $[a, b]$ sem termos que recorrer à definição.

Consideremos f contínua e não negativa em $[a, b]$. O número $\int_a^b f(x)dx$ representa a área A sob o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Observação: Naturalmente, a letra que representa a variável independente pode ser escolhida arbitrariamente, e vale que:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots \text{ etc.}$$

Vamos chamar de $A(x)$ a função que a cada x associa a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, x]$ (ver figura).

Segue que $A(a) = 0$, $A(b) = \int_a^b f(x)dx$, e de um modo geral.

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

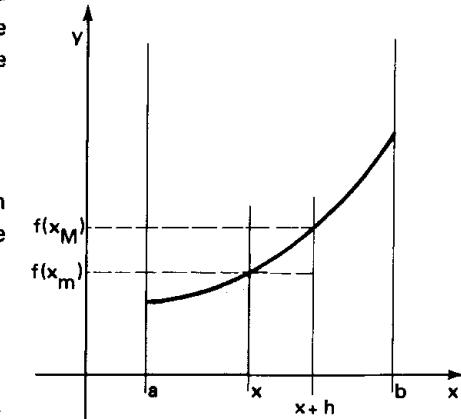
(Evitamos escrever $A(x) = \int_a^x f(x)dx$ para poder destacar que a variável x é um dos extremos do intervalo de integração).

Com as hipóteses já admitidas anteriormente, vamos mostrar que a derivada da função $A(x)$ é a função $f(x)$.

198. Teorema 2

Se $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $A'(x) = f(x)$

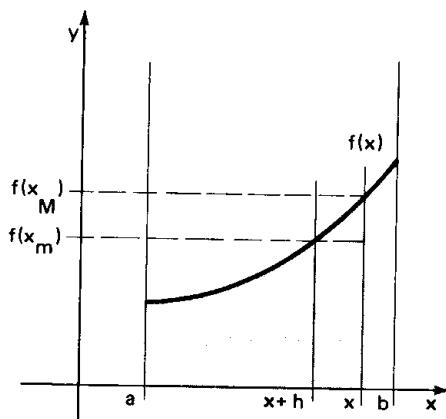
Demonstração

Seja $x \in [a, b]$ e $h > 0$ com $x + h \in [a, b]$.

Sendo f contínua em $[a, b]$, ela o será em $[x, x + h]$, e portanto admite um ponto de máximo x_M e um ponto de mínimo x_m em $[x, x + h]$.

Raciocinando geometricamente, em termos de área, na figura ao lado, segue que

$f(x_m) \cdot h \leqslant A(x + h) - A(x) \leqslant f(x_M) \cdot h$

Logo,

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leqslant f(x_M)$$

Quando h tende a zero, $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto que o quociente $\frac{A(x + h) - A(x)}{h}$ se aproxima da derivada à direita de $A(x)$, isto é:

$f(x) \leqslant A'(x^+) \leqslant f(x)$

Resulta que $A'(x^+) = f(x)$:

Analogamente, sendo $h < 0$, considerando o intervalo $[x + h, x]$, temos:

$f(x_m) \cdot (-h) \leqslant A(x) - A(x + h) \leqslant f(x_M) \cdot (-h)$

Segue que

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x) - A(x+h)}{-h} \leqslant f(x_M)$$

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant f(x_M)$$

e como no caso anterior, quando h tende a zero, resulta que a derivada à esquerda de $A(x)$ é igual a $f(x)$:

$f(x) \leqslant A'(x^-) \leqslant f(x)$, isto é, $A'(x^-) = f(x)$

Isto mostra que $A'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.

Utilizando a notação $A'(x) = \frac{dA}{dx}$ e lembrando que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, temos o resultado

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)}$$

bastante sugestivo, já que estabelece uma relação essencial entre dois conceitos que nasceram de forma independente: o de derivada e o de integral.

Para calcular $\int_a^b f(x)dx$, podemos procurar uma função como $A(x)$, tal que $A(a) = 0$ e $A'(x) = f(x)$, e teremos: $A(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Este procedimento pode ser simplificado se atentarmos para o seguinte teorema.

199. Teorema 3

Se $F(x)$ é uma função qualquer que satisfaz à condição $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$, f contínua em $[a, b]$, então $F(x) = A(x) + c$ onde c é uma constante e $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Demonstração

De fato, mostramos que $A'(x) = f(x)$ e sabemos por hipótese que $F'(x) = f(x)$; segue que a derivada de função $F(x) - A(x)$ é nula em $[a, b]$ e então $F(x) - A(x)$ é constante, ou seja, $F(x) - A(x) = c$.

Sendo, então, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\begin{cases} F(b) = A(b) + c \\ F(a) = A(a) + c = 0 + c = c \end{cases}$$

Logo, $F(b) = A(b) + F(a)$ e então $A(b) = F(b) - F(a)$

200. Resumindo, o procedimento para determinar $\int_a^b f(x)dx$, onde *f é uma função contínua em* $[a, b]$ deve ser o seguinte:

a) procuramos uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

b) vale que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Observação: na justificativa do procedimento acima, utilizamos como hipótese o fato de f ser não negativa em $[a, b]$; caso $f(x) < 0$ uma pequena alteração nos argumentos levaria à mesma conclusão, de modo que a única exigência efetiva para f é a continuidade em $[a, b]$.

201. Uma função F satisfazendo a condição $F'(x) = f(x)$ é chamada *primitiva* de f ou ainda, *integral indefinida* de f. Se F é uma primitiva de f, então $F(x) + c$, onde c é uma constante, também é. De um modo geral, representamos uma primitiva genérica de f por $\int f(x)dx$. Assim, por exemplo, se $f(x) = x^2$, são primitivas de f as funções $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3} + 5$, ou, de um modo geral, $\frac{x^3}{3} + c$, e escrevemos:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Outros exemplos:

1. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3. $\int 1 dx = \int dx = x + c$

4. $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + c$

5. $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x + c$

6. $\int e^x dx = e^x + c$ etc.

202. Como conseqüência de propriedades conhecidas para as derivadas, temos ainda:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	
$\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$	k constante ($k \neq 0$)

Seguem mais alguns exemplos que ilustram a aplicação das propriedades acima.

1. $\int (x^3 + \cos x)dx = \int x^3 dx + \int \cos x \, dx = \frac{x^4}{4} + \text{sen } x + c$

2. $\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

3. $\int (3x + 7)dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + c$

4. $\int (3 \text{ sen } x + 4 \cos x)dx = -3 \cos x + 4 \text{ sen } x + c$

5. $\int (x^2 - 5x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + c$

EXERCÍCIOS

H.303 Determine primitivas para as funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $f(x) = x^{-2/5}$

d) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Solução

Lembrando das regras de derivação já estabelecidas, temos:

a) $f(x) = x^{1/2}$; $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$

b) $f(x) = x^{-3}$; $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

c) $f(x) = x^{-2/5}$; $F(x) = \frac{x^{-2/5+1}}{-\frac{2}{5}+1} = \frac{5}{3}x^{3/5}$

d) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $F(x) = \text{arc tg } x$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $F(x) = x + \frac{1}{x}$

Em cada caso, $F(x) + c$ onde c é constante, também é uma primitiva de $f(x)$. Poderíamos escrever, genericamente: $\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$, etc.

H.304 Determine primitivas para as funções indicadas:

a) $f(x) = x^3 - 2x + 7$

b) $f(x) = \text{sen } x + 3 \cos x$

c) $f(x) = -x^5 + 3$

d) $f(x) = \frac{x^7}{3} + \frac{x^3}{7}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{7}$

H.305 Determine as integrais indefinidas indicadas:

a) $\int (x^3 - 4x^2 - 2x + 1)dx$

b) $\int \sec^2 x \, dx$

c) $\int (\frac{-1}{x^2})dx$

d) $\int \frac{1}{x^3} dx$

e) $\int (\frac{x^3 + 1}{x^2})dx$

H.306 Calcule:

a) $\int \sqrt[5]{x}\, dx$

b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

H.307 Calcule $\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx.$

Solução

Uma primitiva de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \int \cos x\ dx = \text{sen}\ x$. Segue que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ 0 = 1$$

Também costumamos indicar os cálculos como segue:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = \text{sen}\ x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ 0 = 1$$

H.308 Calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^1 x\ dx$

b) $\int_1^2 x^2 dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\ x\ dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\ dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\ dx$

H.309 Calcule:

a) $\int_{-1}^1 7\ dx$

b) $\int_{-1}^1 x^2\ dx$

c) $\int_{-1}^1 x^7\ dx$

d) $\int_0^1 (-x^2)dx$

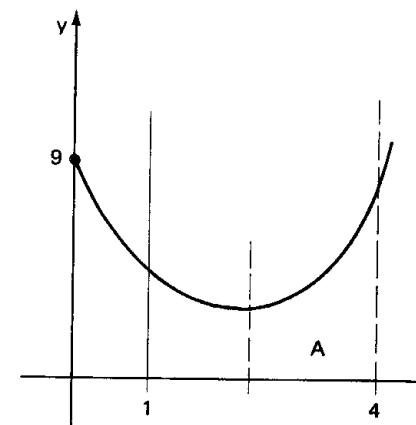
e) $\int_{-1}^1 2x^4\ dx$

H.310 Calcule:

a) $\int_0^2 (x^2 - 3x + 5)dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\ x + \cos x)dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)dx$

d) $\int_0^1 (x^5 - 1)x\ dx$

e) $\int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

H.311 Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 9$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

Solução

A área A será igual a $\int_1^4 f(x)dx$ (ver figura). Logo,

$$F(x) = \int (x^2 - 5x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 9x$$

e então

$$\int_1^4 (x^2 - 5x + 9)dx = F(4) - F(1) =$$

$$= \frac{52}{3} - \frac{41}{6} = \frac{21}{2}.$$

H.312 Calcule a área sob o gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$

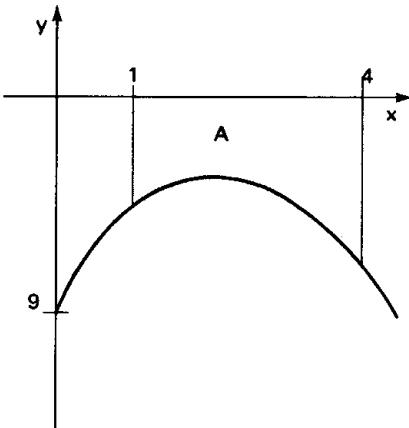
a) $f(x) = 4 - x^2$ e $[a, b] = [-2, 2]$

b) $f(x) = x^2 + 7$ e $[a, b] = [0, 3]$

c) $f(x) = 3 + \text{sen}\ x$ e $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$

d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e $[a, b] = [0, 4]$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e $[a, b] = [0, 1]$

H.313 Calcule $\int_1^4 (-x^2 + 5x - 9)dx$ e interprete o resultado obtido.

Solução

Temos: $F(x) = \int(-x^2 + 5x - 9)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 9x$

$$\int_1^4 (-x^2 + 5x - 9)dx = F(4) - F(1)$$

$$= (-\frac{52}{3}) - (-\frac{41}{6}) = -\frac{63}{6} = -\frac{21}{2}$$

O número $-21/2$ é o simétrico da medida da área indicada na figura abaixo:

(Lembramos que a medida de uma área é um número sempre não negativo).
De um modo geral, se $f(x) < 0$ em $[a, b]$, resulta que

$-f(x) > 0$ em $[a, b]$ e $\int(-f(x))dx = -\int f(x)dx$. Logo, se $f(x) < 0$ em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = -A$ onde A é a área da região situada entre o eixo x e o gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

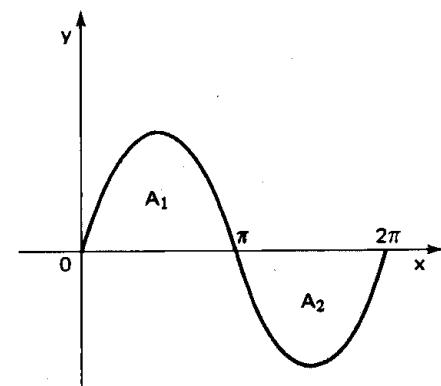
H.314 Calcule $\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx$ e interprete o resultado.

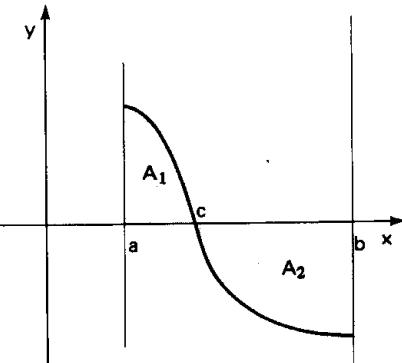
Solução

Temos: $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) =$$

$= -1 + 1 = 0.$

Como $\text{sen } x \geqslant 0$ em $[0, \pi]$ e $\text{sen } x \leqslant 0$ em $[\pi, 2\pi]$,

$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = A_1$ (ver figura)

$\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx = -A_2$ (ver figura)

Como por simetria, sabemos que $A_1 = A_2$, segue que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = A_1 + (-A_2) = 0$$

De um modo geral, se $f(x) \geqslant 0$ em $[a, c]$, e $f(x) \leqslant 0$ em $[c, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 \quad \text{(ver figura)}$$

H.315 Justifique geometricamente, através de uma figura, as afirmações:

a) se f é uma função ímpar, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

b) se f é uma função par, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

H.316 Calcular as áreas da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solução

Nos pontos de intersecção das curvas temos:

$x^2 = -x^2 + 4x \Longrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

A área A pode ser calculada assim

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x)dx - \int_0^2 x^2 dx$$

ou, equivalentemente:

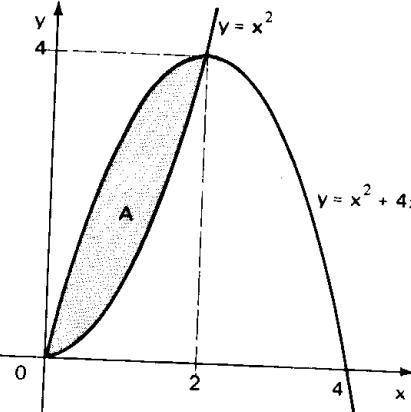
$$A = \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - (x^2)]\, dx$$

Temos, então: $A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx$

e segue que $F(x) = \int (-2x^2 + 4x)dx =$

$$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}$$

e $A = F(2) - F(0) = (-\frac{16}{3} + 8) - 0 = \frac{8}{3}$

H.317 Calcule a área da região limitada pelas curvas:

a) $y = x$ e $y = x^2$
b) $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$
c) $y = x^2$ e $y = 2x + 8$
d) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$
e) $y = \text{sen}\, x$ e $y = x^2 - \pi x$

H.318 Calcule $\frac{dF}{dx}$ sendo $F(x)$ igual a

a) $\int_1^x (5t + 2)dt$

b) $\int_5^x \sqrt{t}\, dt$

c) $\int_1^x \sqrt{t}\, dt$

IV. ALGUMAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

203. Até agora determinamos $\int f(x)dx$ utilizando as regras de derivação e algumas propriedades das derivadas. Entretanto, o cálculo de uma primitiva pode não ser uma tarefa simples ou imediata. Vejamos alguns exemplos:

1. $\int 2x \cdot \cos x^2 dx = \text{sen}\, x^2 + c$
2. $\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$
3. $\int x \cdot \cos x\, dx = x\, \text{sen}\, x + \cos x + c$
4. $\int x \cdot e^x\, dx = xe^x - e^x + c$

Nestes casos, algumas técnicas são requeridas, a fim de determinarmos a integral indefinida. Nestas noções iniciais sobre integral, examinaremos duas: *a integração por substituição* e *a integração por partes*.

204. Integração por substituição

Consideremos o cálculo de uma primitiva de $f(x) = 2x \cdot \cos x^2$. Fazendo a substituição $x^2 = u(x)$, teremos $u'(x) = 2x$, e então $f(x) = u'(x) \cdot \cos u(x)$. Lembrando da regra da cadeia, do cálculo das derivadas, resulta que uma primitiva de $u'(x) \cdot \cos u(x)$ é $\text{sen}\, u(x)$, ou seja, que

$$\int u'(x) \cos u(x) dx = \text{sen}\, u(x) + c$$

De um modo geral, se $f(x)$ pode ser escrita na forma $g(u) \cdot u'$, onde $u = u(x)$, então uma primitiva de $f(x)$ será obtida tomando-se uma primitiva de $g(u)$ e substituindo u por $u(x)$, ou seja:

$\int f(x)dx = \int g(u) \cdot u'(x)dx = G(u(x)) + c$ onde $G(u)$ é tal que $G'(u) = g(u)$.

205. No caso de $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx$, temos:

$u(x) = x^3 - 1$, $u'(x) = 3x^2$

$$\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot u'\, dx = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c =$$
$$= \frac{(x^3 - 1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$$

H.319 Determine as primitivas indicadas:

a) $\int 7 \cdot \text{sen } 7x \, dx$ d) $\int (x+1)^{17} dx$

b) $\int \cos 3x \, dx$ e) $\int e^{\text{sen } x} \cdot \cos x \, dx$

c) $\int e^{x^2} \cdot x \, dx$

Solução

a) Fazendo $u(x) = 7x$, temos $u'(x) = 7$ e segue que

$$\int 7 \text{ sen } 7x \, dx = \int u' \cdot \text{sen } u \, dx = -\cos u + c = -\cos 7x + c$$

b) Fazendo $u(x) = 3x$, temos $u'(x) = 3$ e segue que

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int u' \cdot \cos u \, dx = \frac{1}{3} \text{sen } u + c = \frac{\text{sen } 3x}{3} + c$$

c) Fazendo $u(x) = x^2$, temos $u'(x) = 2x$ e segue que:

$$\int e^{(x^2)} x \cdot dx = \frac{1}{2} \int e^{(x^2)} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \int e^u \cdot u' dx = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{(x^2)} + c$$

d) Fazendo $u(x) = x + 1$, temos $u'(x) = 1$ e segue que

$$\int (x+1)^{17} dx = \int u^{17} \cdot u' \, dx = \frac{u^{18}}{18} + c = \frac{(x+1)^{18}}{18} + c$$

e) Fazendo $u(x) = \text{sen } x$, segue que

$$\int e^{\text{sen } x} \cos x \, dx = \int e^u \cdot u' dx = e^u + c = e^{\text{sen } x} + c$$

H.320 Calcule as integrais indefinidas indicadas:

a) $\int (3x+7)^{15} \cdot 3 \, dx$ d) $\int 3 \cdot \sqrt{3x+7} \, dx$

b) $\int e^{3x} \cdot 3 \, dx$ e) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

c) $\int 5 \cdot \cos 5x \, dx$

H.321 Calcule:

a) $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$ d) $\int \sqrt{5x-1} \, dx$

b) $\int x \cdot \cos 3x^2 dx$ e) $\int \frac{1}{(3x+7)^2} dx$

c) $\int (5x-1)^{13} dx$

H.322 Calcule:

a) $\int e^{3x} dx$ d) $\int \cos(3x+1) dx$

b) $\int (\text{sen } x)^5 \cos x \, dx$ e) $\int (3-2x)^4 dx$

c) $\int \text{sen } 5x \, dx$

206. Integração por partes

Sabemos que para a derivada de um produto $u(x) \cdot v(x)$ vale a igualdade: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

Assim, segue que uma primitiva de $(u(x) \cdot v(x))'$ é igual à soma de uma primitiva de $u'(x)v(x)$ com uma primitiva de $v'(x) \cdot u(x)$ (a menos de uma constante), ou seja:

$$\int (u(x) \cdot v(x))' dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Mas uma primitiva de $(u(x) \cdot v(x))'$ é $u(x) \cdot v(x)$; logo:

$$\boxed{u(x) \cdot v(x) = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx}$$

Isto significa que

$$\boxed{\int v(x) \cdot u'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx}$$

e que, uma primitiva de $v(x) \cdot u'(x)$ pode ser obtida através de uma primitiva de $u(x) \cdot v'(x)$, caso isto seja conveniente.

207. Por exemplo, procuremos uma primitiva de $x \cdot e^x$. Fazendo $v(x) = x$ e $u'(x) = e^x$, temos:

$$\int x \cdot e^x dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Como $u'(x) = e^x \Longrightarrow u(x) = e^x$

$v(x) = x \Longrightarrow v'(x) = 1$

$$\int v(x) \cdot u'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

segue que

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

208. Um outro exemplo: procuremos $\int x \cdot \cos x \, dx$.

Fazendo $v(x) = x$ e $u'(x) = \cos x$, segue que:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Como $u'(x) = \cos x \Longrightarrow u(x) = \text{sen } x$

$v(x) = x \Longrightarrow v'(x) = 1,$

$\int v(x) \cdot u'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$

segue que:

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x + c$$

EXERCÍCIOS

H.323 Calcule:

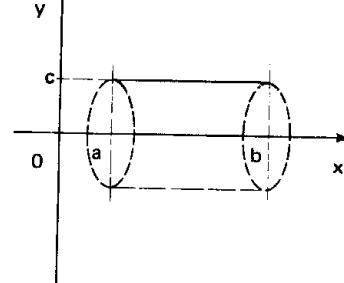
a) $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$

b) $\int (3x + 7) \cdot \cos x \, dx$

c) $\int (2x - 1) \cdot e^x dx$

d) $\int (-3x + 1) \cdot \cos 5x \, dx$

e) $\int (2x - 3) \cdot e^{1-3x} dx$

V. UMA APLICAÇÃO GEOMÉTRICA: CÁLCULO DE VOLUMES

209. Consideremos o sólido de revolução gerado a partir da rotação do gráfico de f em torno do eixo dos x, sendo $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$. (ver figura).

Vamos descrever um modo de calcular o seu volume V.

Se f fosse constante e igual a c em $[a, b]$, o sólido gerado seria um cilindro e teria volume V igual a $\pi c^2 \cdot (b - a)$:

$$V = \pi c^2 \cdot (b - a)$$

Não sendo f constante, vamos dividir $[a, b]$ em pequenos sub-intervalos e em cada um deles, aproximando $f(x)$ por uma função constante, vamos calcular o volume da fatia do sólido gerado como se fosse o de uma fatia cilíndrica:

Assim, o volume V será, aproximadamente, a soma dos volumes das fatias cilíndricas consideradas, ou seja:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\bar{x}_i)]^2 \cdot \Delta_i x$$

onde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$

Lembrando da definição de integral, resulta:

$$V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

210. No caso de um cone circular de raio da base r e altura h, podemos ter:

$f(x) = \frac{r}{h} x$

Logo: $V = \pi \cdot \int_0^h (\frac{r}{h} x)^2 dx =$

$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx =$

$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} =$

$= \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

211. No caso de uma esfera de raio r, podemos ter:

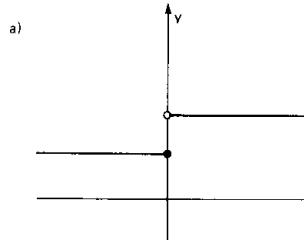
$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Logo:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi \cdot (r^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-r}^{r} = \pi \cdot \frac{2}{3} r^2 - \pi(-\frac{2}{3} r^3) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

EXERCÍCIOS

H.324 Determine o volume do tronco de cone gerado pela rotação do segmento de reta AB, em torno do eixo dos x, sendo A = (1, 1) e B = (2, 3).

H.325 Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = x^2$, $x \in [1, 3]$, em torno do eixo dos x.

H.326 A curva $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 4]$, ao ser girada em torno do eixo dos x determina um sólido de volume V. Calcule V.

RESPOSTAS

CAPÍTULO I

H.1

a)

b)

c)

d)

e)

f)

H.2

a)

b)

c)

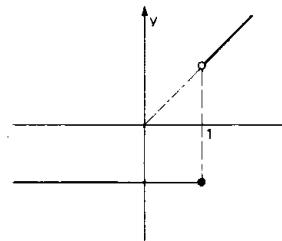
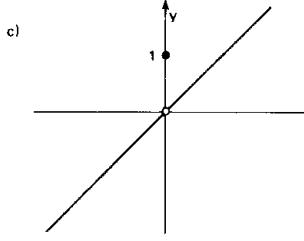
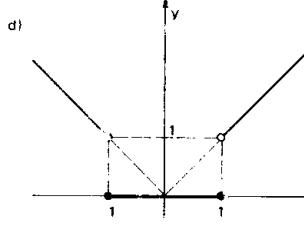
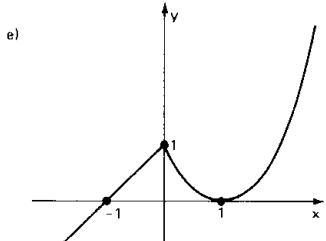
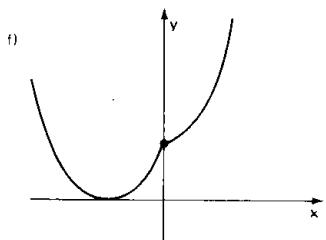
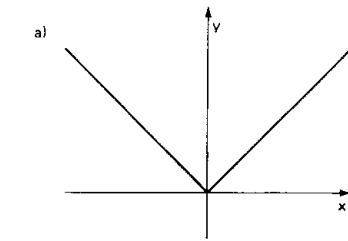
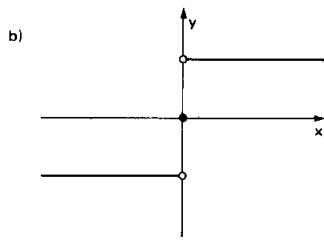
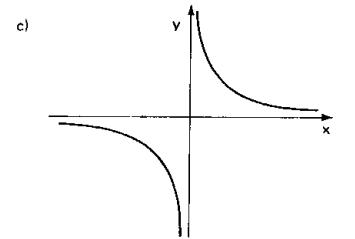
d)

e)

H.3

H.4 $g \circ f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$

H.5 $(g \circ f)(x) = x^3 + 1$
$(f \circ g)\ (x) = (x + 1)^3$
$(f \circ f)\ (x) = x^9$
$(g \circ g)\ (x) = x + 2$

H.6 $(h \circ g \circ f)\ (x) = 2^{(x+2)^2}$
$(f \circ g \circ h)\ (x) = 2^{2x} + 2$

H.7 a) $g(x) = |x|$ e $f(x) = x^2 + 1$
b) $g(x) = \text{sen}\ x$ e $f(x) = x^2 + 4$
c) $g(x) = \text{tg}\ x$ e $f(x) = x^3$
d) $g(x) = x^2$ e $f(x) = \text{tg}\ x$
e) $g(x) = 2^x$ e $f(x) = \cos x$
f) $g(x) = \text{sen}\ x$ e $f(x) = 3^x$

H.8 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2^x$ e $h(x) = \cos x$

H.9 a) $f^{-1} = \{(a', a), (b', b), (c', c)\}$
c) $h^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{5}$
d) $i^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}$
e) $j^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
f) $p^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

H.10 $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x \leqslant 1 \\ \dfrac{2x - 1}{} & \text{quando } 1 < x \leqslant 2 \\ \sqrt{x + 7} & \text{quando } x > 2 \end{cases}$

H.11 $(g^{-1} \circ f^{-1})\ (x) = \dfrac{x^3}{8} + 1$

H.12 $f^{-1}(x) = 10^{2x}$

H.13 $f^{-1}(x) = 2 \cdot \text{arc sen}\ x$

CAPÍTULO II

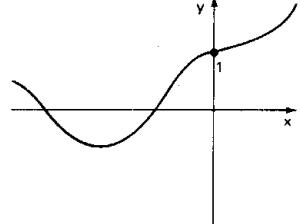
H.15 $0 < \delta \leqslant \dfrac{0{,}01}{3}$

H.16 $0 < \delta \leqslant 0{,}0005$

H.17 $0 < \delta \leqslant 0{,}01$

H.18 $0 < |x - \dfrac{2}{3}| < \delta$ e $0 < \delta \leqslant \dfrac{0{,}0001}{3}$

H.28 a) 2 b) 4 c) $-\dfrac{8}{3}$ d) -12 e) 0 f) $\dfrac{1}{8}$ g) $\dfrac{9}{4}$ h) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ i) 2 j) -2

H.30 a) 2 b) 4 c) 6 d) $\dfrac{2}{5}$ e) $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $\dfrac{7}{11}$ g) $\dfrac{3}{2}$ h) 3 i) $-\dfrac{8}{3}$

H.32 5

H.33 -3

H.35 a) $-\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{21}{19}$ c) 1 d) $\dfrac{11}{2}$

H.37 a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) 8 d) $\dfrac{7}{8}$

H.38 a) $2a$ b) $\dfrac{2}{3a}$ c) n d) $\dfrac{m}{n}$ e) $n\,a^{n-1}$ f) $\dfrac{m}{n}\,a^{m-n}$

H.40 a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) -1 e) 1 f) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

H.41 a) $\dfrac{1}{12}$ b) $-\dfrac{1}{24}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) -8 e) 3

H.43 a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2

H.44 a) $\dfrac{5}{14}$ b) -4

H.46 a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $-\dfrac{1}{6}$

H.47 a) $\dfrac{1}{3}$ b) $-\dfrac{3}{8}$ c) $\dfrac{5}{3}$

H.48 a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5}{6}$ c) -3

H.50 a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{3}{2}$

H.51 a) $3a$ b) $\dfrac{1}{n}$ c) $\dfrac{n}{m}$ d) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{na}$ e) $\dfrac{n \cdot \sqrt[mn]{a^{n-m}}}{m}$

H.52 a) 1 b) 5 c) não existe

H.53 a) 5 b) 5 c) 5

H.54 a) 1 b) -11 c) não existe

H.55 a) 1 b) -3 c) não existe

H.56 a) 2 b) 2 c) 2

H.57 a) 1 b) 1 c) 1

H.59 a) 1 b) -1 c) não existe

H.60 a) -1 b) 1 c) não existe

H.61 a) -3 b) 3 c) não existe

H.62 a) 7 b) -7 c) não existe

H.63 a) -1 b) 1 c) não existe

H.64 a) -3 b) 3 c) não existe

H.65 a) 1 b) 0 c) não existe d) 0 e) 1 f) não existe g) 2 h) 1 i) não existe

H.66 $a = -10$

H.67 $a = 1$

H.68 $a = -4$

CAPÍTULO III

H.70 a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

H.72 a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$ g) $-\infty$ h) $+\infty$ i) $-\infty$ j) $+\infty$

H.76 a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

H.77 a) $+\infty$
b) $-\infty$ se n for par e $+\infty$ se n for ímpar
c) $+\infty$ se $c > 0$ e $-\infty$ se $c < 0$
d) $-\infty$ se $c > 0$ e $+\infty$ se $c < 0$

H.78 a) $+\infty$ b) $+\infty$

H.80 a) $-\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 0 f) 0 g) $\dfrac{1}{3}$ h) 8 i) $\dfrac{9}{8}$ j) 72 k) $\dfrac{3}{2}$

H.82 a) 1 b) -1 c) 2 d) 2 e) $+\infty$ f) 0 g) 1 h) 0

H.84 a) $\dfrac{3}{2}$ b) $+\infty$ c) 0 d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 0 f) $-\dfrac{1}{2}$ g) 0 h) $\dfrac{a}{2}$

H.85 a) 2 b) 1 c) 2

H.86 a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{2}$

CAPÍTULO IV

H.90 a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{a}{b}$

d) $\frac{a}{b}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{a}{b}$

g) 0 h) $-\frac{1}{2}$ i) 2

j) $\frac{1}{2}$

H.92 a) $-\text{sen } a$ b) $\sec^2 a$ c) $\sec a \cdot \text{tg } a$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 0 f) 1 g) $\frac{5}{2}$

h) $\cos a$ i) $-\text{sen } a$ j) 0 k) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ℓ) $\frac{2}{\pi}$ m) $\sqrt{2}$ n) $\frac{3}{2}$ o) $a - b$

p) 0 q) $-\frac{1}{4}$ r) $\frac{1}{2}$ s) $\frac{\pi}{2}$

t) 1

H.93 a) 0 b) 1 c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{1}{2}$

H.94 a) 9 b) 2 c) e^2 d) e^{-3}

H.95 a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$
e) $+\infty$ f) 0

H.96 a) 2^{10} b) 3^{-6} c) e^{-2} d) 10^{-1}

H.97 a) 81 b) 4 c) 1 d) 3
e) e^2 f) e^{-12}

H.98 a) $\log_3 2$ b) -2 c) 2 d) 3

H.99 a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) $-\infty$ f) $+\infty$

H.100 a) 4 b) $\ell n\ 37$ c) $\log \frac{4}{3}$ d) 3

H.101 a) -1 b) 0 c) $\ell n\ 4$ d) $\log \frac{8}{3}$

H.103 a) e^3 b) e c) e^4 d) e^6
e) $e^{\frac{3}{4}}$ f) e^a g) e^{ab} h) $\frac{1}{e}$

H.104 a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e^2}$ c) $\frac{1}{e^3}$ d) $\frac{1}{e^6}$

H.106 a) e^7 b) e c) e^{-5} d) e^{-3}
e) e^4

H.107 a) e b) e^{-1} c) e^2

H.108 a) 2 b) $3\ \ell n\ 2$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2\ \ell n\ 3}{5\ \ell n\ 2}$
e) e^2 f) e^a g) $2^a \cdot \ell n\ 2$

H.109 a) 1 b) $\log e$ c) 2 d) $\frac{3}{\ell n\ 10}$

H.110 e^{-2}

CAPÍTULO V

H.112 a) descontínua
b) descontínua
c) contínua
d) descontínua

H.113 a) descontínua
b) contínua
c) contínua
d) descontínua

H.114 a) contínua
b) contínua
c) descontínua
d) descontínua

H.115 a) descontínua
b) descontínua
c) descontínua

H.116 a) $a = -1$
b) $a = -\frac{1}{3}$
c) $a = \frac{-47}{4}$
d) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $a = \frac{1}{3}$

H.117 $a = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z$

CAPÍTULO VI

H.118 3

H.119 4

H.120 3

H.121 1

H.122 Não existe

H.123 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

H.124 $\frac{1}{2}$

H.125 $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

H.126 [illegible]

H.127 zero

H.130 a) [illegible]
b) $y = -1$
c) $y = x$
d) $y = -x + 2$
e) $y = \frac{1}{4}x + 1$
f) $y = \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{2}{3}$

H.132 $-\frac{1}{9}$ m/s

H.134 53 m/s²

H.135 $f'(x) = 0$
$g'(x) = 6x^5$
$h'(x) = 15x^{14}$

H.136 $f'(x) = c\,n\,x^{-1}$
$g'(x) = \sec^2 x$
$h'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$

H.138 $y = e^2 x - e^2$

H.140 a) 32 m/s
b) 108 m/s²
c) t = 3s
d) t = 2s

CAPÍTULO VII

H.142 a) $f'(x) = 88x^{10}$
b) $f'(x) = -\frac{21}{5}x^2$
c) $f'(x) = 6x + 1$
d) $f'(x) = 4x^3 + 10x$
e) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$
f) $f'(x) = 2nx^{2n-1} + 2n\,x^{n-1}$

H.144 a) $f'(x) = 15x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 8x + 1$
b) $f'(x) = 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 4x^3 + 3x^2$
c) $f'(x) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$
d) $f'(x) = 104 \cdot (2x + 3)^{51}$
e) $f'(x) = (x^3 + 3x^2) \cdot e^x$
f) $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x - \text{sen } x$
g) $f'(x) = 2a^{2x} \cdot x^3\ (2 + \ell n\ a)$
h) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$
i) $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{x^2 + x + 1}$
j) $f'(x) = -5 \cdot \cos^4 x \cdot \text{sen } x$
k) $f'(x) = \text{sen}^6 x \cdot \cos^3 x\ (7 \cdot \cos x - 3 \cdot \text{sen}^2 x)$
ℓ) $f'(x) = a \cdot \cos x - b \cdot \text{sen } x$

H.145 $f'(0) = 4$

H.146 $y = -3840 \cdot x + (3840\pi - 1024)$

H.147 $v = -a \cdot e^{-t} \cdot (\cos t + \text{sen } t)$
$a = 2a \cdot \text{sen } t \cdot e^{-t}$

H.149 a) $f'(x) = -14 \cdot x^{-8}$
b) $f'(x) = -15 \cdot x^{-6}$
c) $f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$
d) $f'(x) = -\frac{2}{(x - 1)^2}$
e) $f'(x) = -\frac{5x + 3}{(x^2 - 1)^2}$
f) $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2}$
g) $f'(x) = \frac{2x \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot \cos x - x^2 \cdot \text{sen } x}{e^x}$
h) $f'(x) = -\frac{x(\text{sen } x + \cos x) + \cos x}{x^2 \cdot e^x}$

H.150 a) $f'(x) = -\text{cossec}^2 x$
b) $f'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$
c) $f'(x) = -\text{cossec } x \cdot \text{cotg } x$
d) $f'(x) = 2 \cdot \text{tg } x \cdot \sec^2 x$
e) $f'(x) = \sec x \cdot (\text{tg } x - \sec x)$
f) $f'(x) = 2x \cdot \text{tg } x + (x^2 + 1) \cdot \sec^2 x$
g) $f'(x) = \frac{\sec^2 x \cdot (\text{sen } x + \cos x) - \text{tg } x \cdot (\cos x - \text{sen } x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$
h) $f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x}}{\text{tg}^3 x} \cdot (\text{tg } x - \sec^2 x)$

H.151 $y = (\frac{1}{e} - 1)(x + 2)$

H.152 $f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{128}{\pi^3} - \frac{1}{e^{\pi/4}} + 4$

H.153 a) $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
b) 1
c) $(0, 0), (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$

H.155 a) $F'(x) = 4 \cdot \cos 4x$
b) $F'(x) = -\frac{7x \cdot \text{sen } x + \cos 7x}{x^2}$
c) $F'(x) = ab \cdot \cos bx$
d) $F'(x) = -(6x + 1) \cdot \text{sen}(3x^2 + x + 5)$
e) $F'(x) = e^x \cdot \cos e^x$
f) $F'(x) = 1 + 12 \cdot \sec^2 4x$
g) $F'(x) = a^{\text{sen } x} \cdot \cos x \cdot \ell n\ a$
h) $F'(x) = -3 \cdot \text{cossec}^2 (3x - 1)$
i) $F'(x) = (2x + 5) \cdot a^{x^2 + 5x + 1} \cdot \ell n\ a$
j) $F'(x) = -\text{sen } x \cdot \sec^2 (\cos x)$
k) $F'(x) = 6 \cdot \text{tg}^2 2x \cdot \sec^2 2x$
ℓ) $F'(x) = 2 \cdot e^{\text{sen } 2x} \cdot \cos 2x$

H.156 $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

H.157 $f'(-1) = 3 \cdot e^{-4}$

H.158 $y = \frac{e^{-2} - e^2}{2} \cdot x + \frac{3e^2 - e^{-2}}{2}$

H.159 Sim: $a_1' = \cos x = a_2$
$a_2' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = a_3$
$a_3' = \cos(x + \pi) = a_4$
.
.
.
$a_n' = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = a_{n+1}$

H.161 a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$
b) $f'(x) = x^{n-1}(n \cdot \ell n\ x + 1)$
c) $f'(x) = a \cdot \ell n\ x + \frac{ax + b}{x}$
d) $f'(x) = \cos x \cdot \ell n\ x + \frac{\text{sen } x}{x}$

e) $f'(x) = \dfrac{\cos x + x \cdot \ell n\, x \cdot \text{sen}\, x}{x \cdot \cos^2 x}$

f) $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$

g) $f'(x) = \text{cotg}\, x$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ell n\, x \cdot \ell n\, a}$

H.162 a) $f'(x) = \dfrac{4}{7 \cdot x^{3/7}}$

b) $f'(x) = \dfrac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^5}$

c) $f'(x) = \dfrac{9}{2}\sqrt{x^7}$

d) $f'(x) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{5} \cdot x^{-7/5}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{x^3}$

g) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

h) $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{3\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

i) $f'(x) = \dfrac{b}{4\sqrt{ax + bx^{3/2}}}$

j) $f'(x) = \dfrac{(a - c) \cdot [bx^2 + 2(a + c)x + b]}{2\sqrt{(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)^3}}$

k) $f'(x) = -\dfrac{4ab}{3\sqrt[3]{(ax + b)(ax - b)^5}}$

ℓ) $f'(x) = \dfrac{8x + 4}{3\sqrt[3]{1 + x + x^2}}$

m) $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$

n) $f'(x) = \dfrac{15x^2 + 8x + 3}{2\sqrt{3x + 2}}$

o) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x} \cdot (2 - \sqrt{x})^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{x - 3}{2(x - 1)^{3/2}}$

q) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

r) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{\cos x}}$

s) $f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

t) $f'(x) = \dfrac{1}{2(1 + x) \cdot \ell n\, a}$

H.163 a) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

b) $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = \text{arc tg}\, x + \dfrac{x}{1 + x^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc sen}\, x - 3x}{3\sqrt[6]{x^4(1 - x^2)^3}(\text{arc sen}\, x)^2}$

h) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc cos}\, x}$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{\text{arc tg}\, x}}$

j) $f'(x) = \text{arc sen}\, x^2 + \dfrac{2x^2}{\sqrt{1 - x^4}} - 3x^2 e^{x^3}$

k) $f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x e^{2x} - x^2}}$

ℓ) $f'(x) = \dfrac{\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc sen}\, x \cdot \text{arc cos}\, x}$

H.164 $y = \dfrac{11}{4}x - \dfrac{9}{4}$

H.165 $(3, 2\sqrt{2})$

H.167 $\dfrac{1}{9}$

H.170 a) $f'(x) = (\text{sen}\, x)^{(x^2)} \cdot [2x \cdot \ell n\, \text{sen}\, x + x^2 \cdot \text{cotg}\, x]$

b) $f'(x) = x^{(x^3)} \cdot x^2[3 \cdot \ell n\, x + 1]$

c) $f'(x) = x^{(e^x)} \cdot e^x \cdot [\ell n\, x + \frac{1}{x}]$

d) $f'(x) = (e^x)^{\text{tg}\, 3x} \cdot [3 \cdot \sec^2 3x \cdot x + \text{tg}\, 3x]$

H.171 a) $f'(x) = 4x^3 + 10x$

$f''(x) = 12x^2 + 10$

$f'''(x) = 24x$

$f^{IV}(x) = 24$

$f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geqslant 5$

b) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n!\, x^{-n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) $f^{(n)}(x) = (-1)^n, e^{-x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

e) $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

H.172 a) $v(t) = -a\omega\, \text{sen}(\omega t + \varphi)$

b) $v(0) = -a\omega\, \text{sen}\, \varphi$

c) $a(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

d) $a(1) = -a\omega^2 \cos(\omega + \varphi)$

H.173 $A = 6$ e $k = 2$

CAPÍTULO VIII

H.175 Sim.

H.176 Não, não existe $f'(2)$

H.177 Não, não existe $f'(0)$

H.178 $f(x) = x^2$, no intervalo $[-1, 4]$, tem derivada nula para $x = 0$ e, no entanto, $f(-1) = 1 \neq f(4) = 16$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, no intervalo $[-2, 2]$, tem derivada nula para $x = 0$, $f(-2) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ e, no entanto, g não é contínua no intervalo.

H.179 $c = 3$

H.180 $c = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

H.181 $c = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

H.183 $c = \dfrac{1}{2}$

H.184 $c = \dfrac{8}{27}$

H.185 $c = \pm\sqrt{2}$

H.186 $c = 1 + \sqrt{5}$

H.188 f não é contínua em I

H.189 f não é contínua em I

H.190 f não é derivável em $x = 1 \in I$

H.192 $f: x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 7$

$g: \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$h: -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$i: -1 \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$

H.194 $f: x \leqslant -2$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$

$g: x \leqslant 0$

h: não existe x

i: não existe x

H.195 crescente para $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 5$
decrescente para $1 \leqslant x \leqslant 5$

H.196 crescente para $x \geqslant -1$
decrescente para $x \leqslant -1$

H.197 crescente para $x \leqslant -2$ ou $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$
decrescente para $-2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 2$

H.198 crescente para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
decrescente para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $x \neq 0$

H.199 crescente para $-3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

decrescente para $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 0$

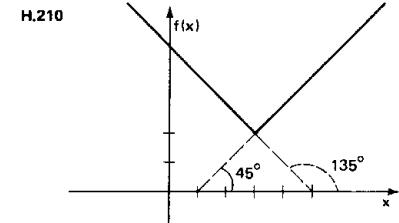
ou $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 3$

H.200 decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$

H.201 crescente para $x < 2$
decrescente para $x > 2$

H.202 crescente para $x \geqslant 0$
decrescente para $x \leqslant 0$

H.203 crescente para $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

decrescente para $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ ou $x \geqslant 1$

H.204 crescente para todo $x \in \mathbb{R}_+$

H.205 crescente em $\mathbb{R}_+$
decrescente em $\mathbb{R}_-$

H.206 crescente para $-\dfrac{\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

decrescente para $\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{11\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

H.207 crescente para $\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi$
decrescente para $2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$

H.210

H.214 $x = -\dfrac{5}{2}$ é ponto de máximo

H.215 $x = 2$ é ponto de mínimo

H.216 $\begin{cases} x = 3 & \text{é ponto de mínimo e} \\ x = -3 & \text{é ponto de máximo} \end{cases}$

H.217 $x = 2$ é ponto de inflexão

H.218 $\begin{cases} x = 6 & \text{é ponto de máximo e} \\ x = \frac{50}{7} & \text{é ponto de mínimo} \end{cases}$

H.219 $x = -\dfrac{5}{2}$ é ponto de máximo

H.220 $\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \ (k \in Z) \text{ é ponto de máximo e} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \ (k \in Z) \text{ é ponto de mínimo} \end{cases}$

H.221 $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \ (k \in Z) \text{ é ponto de máximo} \\ x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \ (k \in Z) \text{ é ponto de mínimo} \end{cases}$

H.222 $x = e^{-1}$ é ponto de mínimo

H.223 $x = 0$ é ponto de mínimo

H.224 $x = -1$ é ponto de máximo e
$x = 1$ é ponto de mínimo

H.226 $f(2) = -5$ é valor mínimo

H.227 $f(\sqrt[3]{-2}) = 2\sqrt[3]{2} + 8\sqrt{-2}$ é valor mínimo

H.228 $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \text{ é valor máximo e} \\ f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ é valor mínimo} \end{cases}$

H.229 $\begin{cases} f(0) = 0 \text{ é valor mínimo e} \\ f(-2) = 4e^{-2} \text{ é valor mínimo} \end{cases}$

H.230 não tem extremos

H.231 $f(1) = 0$ é valor mínimo

H.232 $\begin{cases} (-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3}) \text{ é ponto máximo e} \\ (\sqrt{3},\ -6\sqrt{3}) \text{ é ponto mínimo} \end{cases}$

H.233 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$ é ponto máximo

H.234 $(\sqrt[3]{-2}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}})$ é ponto mínimo

H.235 $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$ é ponto máximo

H.236 $a = -\frac{3}{2}$ e $b = \frac{11}{2}$

H.237 $t = 3s$

H.238 $x = 2$ é ponto de mínimo absoluto
$x = 5$ é ponto de máximo absoluto

H.239 $x = 6$ é ponto de mínimo absoluto
não existe máximo absoluto

H.241 a) $t = \frac{1}{k}(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \ell)$ e $s = 0$

b) $t = \frac{1}{k}(2k\pi - \ell)$ e $s = a$

H.243 $x = y = \frac{a}{2}$

H.244 5 R

H.246 $h = \frac{4R}{3}$ e $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$

H.247 $r = R\sqrt{2}$ e $h = 4R$

H.248 8 cm

H.249 a 4 km de B e 6 km de C

H.250 $\ell_1 = \frac{\pi L}{\pi + 4}$ e $\ell_2 = \frac{4L}{\pi + 4}$

H.251 $\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

H.252 $4\sqrt{3A}$

H.253 $\theta = \text{arc cos}\ \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$

H.254 $x = \frac{1}{2}$ é ponto de mínimo

H.255 $\begin{cases} x = -1 \text{ é ponto de mínimo e} \\ x = 1 \text{ é ponto de máximo} \end{cases}$

H.256 $\begin{cases} x = 0 \text{ é ponto de mínimo e} \\ x = -2 \text{ é ponto de máximo} \end{cases}$

H.257 $x = 0$ é ponto de mínimo

H.258 $x = 0$ é ponto de mínimo

H.259 não tem extremante

H.260 $(e^2, \frac{1}{4})$ é ponto máximo

H.261 $x = 1$ é ponto de máximo absoluto e
$x = -2$ é ponto de mínimo absoluto

H.262 $x = -1$ é ponto de máximo absoluto e
$x = 2$ é ponto de mínimo absoluto

H.263 $x = -6$ é ponto de mínimo absoluto e
$x = 1$ é ponto de máximo absoluto

H.265 (1, 2)

H.267 $h = \frac{4R}{3}$ e $r = \frac{4\sqrt{2}\,R}{3}$

H.268 $h = 4R$ e $r = R\sqrt{2}$

H.269 $\frac{\sqrt[3]{6V}}{3}$, $\sqrt[3]{6V}$, $\frac{\sqrt[3]{6V}}{2}$

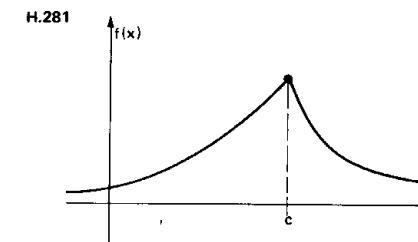
H.270 18 cm e 24 cm

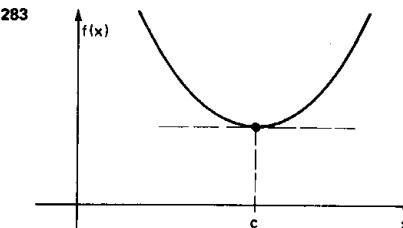
H.271 7 dias

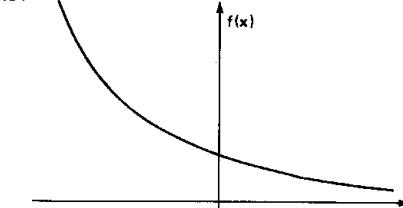
H.272 $\frac{c - b}{2d}$

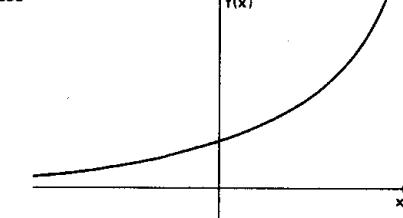
H.273 $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x > 0 \\ \text{conc. negat. para } x < 0 \\ \text{ponto de inflexão: } (0, 0) \end{cases}$

H.274 $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x > 1 \text{ ou } -1 < x < 0 \\ \text{conc. negat. para } x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \\ \text{ponto de inflexão: } (0, 0) \end{cases}$

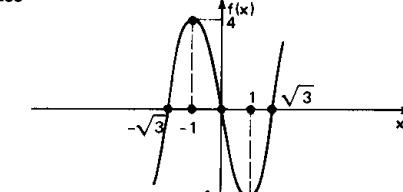
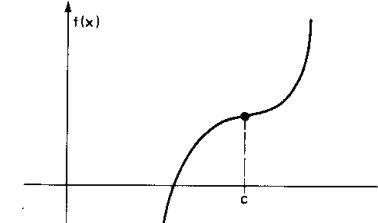
H.275 $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x < 2 \\ \text{conc. negat. para } x > 2 \\ \text{ponto de inflexão: } (2, 0) \end{cases}$

H.276 $\begin{cases} \text{conc. posit. para } -\sqrt{6} < x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{6} \\ \text{conc. negat. para } x < -\sqrt{6} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{6} \\ \text{pontos de inflexão: } (0, 0), (\sqrt{6}, \frac{\sqrt{60}}{50}), \\ (-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{60}}{50}) \end{cases}$

H.277 $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3} \\ \text{conc. negat. para } 1 < x < \frac{4}{3} \\ \text{pontos de inflexão: } (1, 1) \text{ e } (\frac{4}{3}, \frac{70}{27}) \end{cases}$

H.278 $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

H.279 $x < \frac{3}{5}$ e $x \neq 0$

H.280 $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$

H.281

H.282

H.283

H.284

H.285

H.286 $a_0 = 3,\ a_1 = 0,\ a_2 = -6$ e $a_3 = 2$

H.287 $a_0 = a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\frac{6}{5},\ a_4 = \frac{1}{5}$

H.288

H.289

TESTES

LIMITES

TH.1 (ITA-69) Sejam ℝ o conjunto dos números reais e C um subconjunto de ℝ. Definimos supremo de C como sendo o número L satisfazendo as seguintes condições:

1ª) $L \geqslant x, \quad x \in C$
2ª) $L' < L \Longrightarrow \exists\, x \in C \mid x > L'$

Seja C o conjunto dos números naturais menores do que 11. Assinale a afirmação verdadeira, relativa ao conjunto C:

a) $L = 9$
b) $L = 10$
c) $L = 11$
d) $L = 12$
e) não existe L.

TH.2 (ITA-70) Seja B um subconjunto do conjunto dos números reais ℝ. Dizemos que um número *b* é um ponto de acumulação do conjunto B, se para qualquer número real positivo k, arbitrariamente dado, existir um elemento *c* de B tal que $0 < |b - c| < k$. Nestas condições b = 10 é ponto de acumulação do conjunto dos

a) naturais menores do que 10
b) naturais menores ou iguais a 10
c) racionais maiores do que 1 e menores ou iguais a 9
d) racionais maiores do que 1 e menores do que 10
e) nenhuma das afirmações anteriores é válida

TH.3 (GV-71) O limite, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$,

a) não existe
b) é 4
c) é zero
d) é 2
e) é $+\infty$

TH.4 (PUC-71) O limite: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

a) não existe
b) não é nenhum número real
c) vale 2
d) vale 0
e) vale 4

TH.5 (CESCEA-74) O valor do limite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ é:

a) 0 b) 12 c) 16 d) 8 e) não sei.

TH.6 (PUC-70) O $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ vale:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 6

TH.7 (PUC-73) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 3x^2 + 2}$

a) $\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{7}{3}$

TH.8 (PUC-71) O limite: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^4 - a^4}{x - a}$ vale:

a) a^3 b) $2a^3$ c) $3a^3$ d) $4a^3$ e) $5a^3$

TH.9 (PUC-70) O limite $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{7}}$ vale:

a) $5\sqrt[5]{7^4}$ b) 0 c) 7^5 d) $\sqrt[5]{7}$ e) 1

TH.10 (PUC-71) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{3}{2}$

TH.11 (PUC-74) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x + 6} - 2}{x - 1}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{1}{7}$ e) $\dfrac{1}{8}$

TH.12 (CESCEA-72) Assinale a afirmação falsa:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + x}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x^2 + 1} = -\dfrac{1}{2}$ e) não sei.

TH.13 (PUC-78) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2 + 6x + 3}{x^2 - 5}}$ é igual a:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

TH.14 (CESCEA-73) Assinalar, dentre as afirmações seguintes, a correta:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 4n + 5}{n^3 + 2n^2 + 5} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} = 1$

TH.15 (PUC-72) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

TH.16 (MACK-75) O $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) ∞

TH.17 (FUVEST-77) Sabe-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = 1.$$

Conclui-se que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) é $\frac{1}{2}$ b) é 0 c) é infinito d) é indeterminado e) não existe

TH.18 (FEI-66) O limite de $\dfrac{\text{sen}\,\pi x}{x}$, quando x tende a zero, é igual a:

a) 1 b) 0 c) π d) ∞ e) Nenhuma das anteriores.

TH.19 (PUC-72) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\,x}{x}$

a) 0 b) 4 c) 2 d) 3 e) 1

TH.20 (PUC-70) Sobre o $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \text{sen}\,\frac{1}{x}$, pode-se afirmar:

a) não existe b) é 1 c) é zero d) é ∞ e) n.r.a.

TH.21 (PUC-74) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\,x - x}{x - \text{sen}\,x}$ é igual a:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4

TH.22 (FEI-67) Se $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \frac{1}{x}) \cdot \text{tg}\,ax = 3$, então:

a) a = 3 b) a = -1 c) a = -3

d) a = $-\infty$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.23 (CICE-68) O limite $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \cdot \ell n\,\text{sen}\,x)$, onde ℓn = logaritmo neperiano, é igual a:

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 1 d) 0 e) π

TH.24 (CICE-68) O limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \text{sen}\,x - 1}{\ell n\,(1 + x)}$, onde ℓn = logaritmo neperiano, é igual a:

a) 2 b) 1 c) 0 d) e e) $+\infty$

TH.25 (PUC-71) Sendo *e* a base dos logaritmos neperianos, o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ vale:

a) 0 b) ∞ c) -1 d) 1 e) $\frac{1}{2}$

TH.26 (PUC-73) O $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é igual a:

a) $\log_a e$ b) $\log_e a$ c) 1 d) e e) a

TH.27 (CESCEA-73) Dadas as afirmações

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x) = 0$

então

a) todas as afirmações são falsas
b) somente as afirmações 1 e 2 são falsas
c) somente as afirmações 1 e 3 são falsas
d) somente as afirmações 2 e 3 são falsas
e) todas as afirmações são verdadeiras.

TH.28 (CESCEM-74) $\lim\limits_{n\to\infty} [5 + (1 + \frac{1}{n})^n]$ vale

a) 5e b) e^5 c) 5 - e d) 5 + e e) 5^e

TH.29 (PUC-71) Se $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, então, para k real e não nulo, o limite

$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{kx}$

vale:

a) ke b) e^k c) k^e d) e + k e) $\frac{e}{k}$

TH.30 (CESCEM-73) O valor de $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + ... + n}{n^2}$ é

a) 0 b) 0,5 c) 2 d) $+\infty$ e) inexistente

TH.31 (CESCEM-71 A seqüência $(\frac{4^n}{n!})$; n = 0, 1, 2, ...:

a) é crescente b) é decrescente c) tende para um

d) tende para zero e) não tem limite

TH.32 (CESCEM-74) A seqüência $(a_n)_{n \in w}$

$$a_n = \frac{\frac{(a+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

tende para

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $+\infty$

TH.33 (PUC-70) Sobre a função

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leqslant 3 \\ +\sqrt{x-3}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

pode-se afirmar:

a) é definida e contínua $\forall x \in \mathbb{R}$
b) é definida e contínua somente para $x > 3$
c) é definida $\forall x \in \mathbb{R}$ e descontínua somente para $x = 3$
d) é definida e contínua somente para $x \leqslant 3$
e) nenhuma das respostas anteriores

TH.34 (FEI-68) Assinale

a) se todas as proposições P, Q, R forem verdadeiras
b) se forem verdadeiras somente P e Q
c) se forem verdadeiras somente P e R
d) se forem verdadeiras somente R e Q
e) se todas forem falsas

Uma função f(x) é derivável num intervalo (a, b). Então:

P: f é contínua em cada ponto de (a, b)
Q: Se num ponto x se tem $f'(x) > 0$ a função é crescente nesse ponto
R: Para dois pontos quaisquer x_1 e x_2 de (a, b), tem-se

$f'(x_1 + x_2) = f'(x_1) + f'(x_2)$

TH.35 (MACK-74) Os pontos de descontinuidade em $\mathbb{R}$ das funções f, g e h, dadas por $f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-4}$; $g(x) = \text{cotg } 2x$; $h(x) = 4^{-x}$ são

	f	g	h
a)	2	$2k\pi$	$x > 0$
b)	2, -2	$k\frac{\pi}{2}$	não existem
c)	0, -2, 2	$k\pi \pm \frac{\pi}{2}$	não existem
d)	-2	$k\pi$	infinito
e)	nenhum dos anteriores		

DERIVADAS

TH.36 (FEI-68) Indicando por Df a derivada de uma função f, tem-se:

a) $D(\frac{1}{u}) = \frac{1}{Du}$ b) $D(uv) = Du \cdot Dv$ c) $D(\frac{1}{u}) = -\frac{Du}{u^2}$

d) $D(uv) = v \cdot Du - u \cdot Dv$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.37 (PUC-71) A derivada primeira da função $y = \frac{1}{kx}$ é:

a) $y' = -\frac{1}{kx^2}$ b) $y' = -\frac{1}{k^2x^2}$ c) $y' = -\frac{k}{x}$

d) $y' = -\frac{k}{x^2}$ e) $y' = -\frac{1}{k^2x}$

TH.38 (PUC-72) Se $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$, então:

a) $y' = x$ b) $y' = 1$ c) $y' = 2x$ d) $y' = 2$ e) nenhuma das anteriores.

TH.39 (FEI-67) Sendo $g(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$, então a derivada $g'(\frac{1}{3})$ é igual a:

a) 2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.40 (PUC-78) A derivada da função $y = \frac{x^2}{x - 1}$ no ponto $x = 2$, é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 0 e) 1

TH.41 (PUC-74) A derivada da função $y = \frac{1 + 2x}{2x - 1}$ no ponto $x = 1$ é:

a) −2 b) −3 c) −1 d) −5 e) −4

TH.42 (FEI-66) Sendo $f(x) = (5 - 2x)^8$, a derivada $f'(3)$ é igual a:

a) −8 b) 1 c) 8 d) 16 e) nenhuma das respostas anteriores

TH.43 (EPUSP-67) Sendo $f(x) = 5 \cdot \sqrt{9 + x^2}$, a derivada $f'(4)$ vale:

a) 0 b) 4 c) 15 d) 25 e) nenhuma das respostas anteriores

TH.44 (PUC-70) A derivada da função $f(x) = \text{tg}\, x$, calculada no ponto $x = \frac{\pi}{4}$, vale:

a) 1 b) 2 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 0

TH.45 (CICE-68) Seja $y(x)$ a função $y(x) = \frac{\text{tg}\, x}{x}$, $x \neq 0$, $y(0) = a$. Pode-se afirmar que no ponto $x = 0$:

a) $y(x)$ é descontínua qualquer que seja a
b) $y(x)$ é contínua qualquer que seja a
c) $y(x)$ é contínua se for $a = 0$
d) $y(x)$ é derivável se for $a = 0$
e) $y(x)$ é contínua se for $a = 1$

TH.46 (EPUSP-66) A função $y = |\text{sen}\, x|$

a) é descontínua nos pontos da forma $k\pi$ (k inteiro)
b) não é derivável nos pontos da forma $k\pi$
c) é derivável em qualquer ponto
d) é derivável mas não é contínua
e) nenhuma das respostas anteriores

TH.47 (PUC-70) Sendo $f(x) = \text{sen}^2 2x$, então sua derivada primeira calculada para $x = \frac{\pi}{8}$ vale:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

TH.48 (MACK-73) Sejam $g(x) = \text{sen}\, x$; $f(x) = \cos 2x$; $h(x) = \sqrt{3x - 2x^2}$

1) $g'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (g' é a função derivada da função g)

2) $f'(\frac{\pi}{4}) = -1$

3) $h'(1) = -2$

então

a) se apenas as afirmativas 1) e 2) são verdadeiras
b) se apenas as afirmativas 2) e 3) são verdadeiras
c) se apenas as afirmativas 1) e 3) são verdadeiras
d) se todas as afirmativas são verdadeiras
e) se nenhuma afirmativa é verdadeira

TH.49 (CICE-68) Sendo *e* a base dos logaritmos neperianos, a derivada da função $y = e^{-|x|}$ no ponto $x = 0$:

a) é igual a 1 b) é igual a −1 c) é igual a ±1
d) é igual a ±e e) não existe

TH.50 (PUC-71) A derivada da função $y = e^{\log_e x}$ é:

a) x b) e^x c) 1 d) 0 e) 2

TH.51 (CICE-68) Sendo $y = \ell n \cos\left(\frac{3x - \pi}{4}\right)$, $0 \leqslant x < \pi$, a derivada primeira de y em relação a *x* no ponto $x = \frac{2\pi}{3}$ é igual a:

a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) 0 e) $\frac{3\pi}{4}$

TH.52 (E.E.LINS-68) Se $f(x) = e^{2x} \cdot \ell n\, x$, então:

a) $f'(1) = 3 \cdot e^2$ b) $f'(1) = 2 \cdot e^2$ c) $f'(1) = 0$
d) $f'(1) = e^2$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.53 (E.E.LINS-67) A derivada da função $y = \text{arc tg} \sqrt{x}$ é:

a) $\frac{1}{1 + x^2}$ b) $\frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$ c) 2x

d) $\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.54 (PUC-71) A derivada primeira da função $y = \text{arc tg} \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x}$ é:

a) $\cos x + \text{sen}\, x$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\text{sen}\, x - \cos x$

d) $\cos 2x$ e) $\frac{1}{2}$

TH.55 (PUC-71) Se $y = \text{sen}(\text{arc sen } x) + \cos(\text{arc cos } x)$, a derivada primeira y' será igual a:

a) $x + 1$ b) $x - 1$ c) 2 d) -2 e) 3

TH.56 (EPUSP-68) Seja $y = y(x)$ uma função derivável tal que $y(1) > 0$ e $x^2 + y^2 = 2$. A derivada de $y(x)$ no ponto $x = 1$:

a) não existe b) é igual a 1 c) é igual a -1

d) é igual a $\frac{1}{2}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.57 (CESCEA-73) Seja $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Então, a derivada de f, no ponto $x = 1$, é:

a) 0 b) 10 c) 9 d) 6

TH.58 (GV-71) A derivada da função dada por $y = \frac{x^3}{3} - 1$ no ponto $x = 0$ vale:

a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 2 e) 0

TH.59 (CESCEM-72) O valor numérico do polinômio derivado de $P(x) = 3x^4 + 12x - 7$ para $x = -1$ vale:

a) -16 b) -7 c) 0 d) 3 e) 24

TH.60 (MACK-74) A derivada da função f dada por

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2x & 3x^2 & 4 \\ 5 & 6x & 2x^2 \end{vmatrix}$$

é:

a) $3x^2$; b) não existe; c) $-4x^3 - 4$; d) $15x^4$; e) $6x^4$.

TH.61 (CESCEA-72) Assinale a afirmação falsa:

a) a derivada da função $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$

b) $f(x) = k$, k constante $\longrightarrow f'(x) = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

e) não sei.

TH.62 (CESCEM-74) Se $f'(x) = 6x$, podemos afirmar que $f(x)$ vale:

a) $6x^2 + 3x + k$ b) $3x^2 + k$ c) $6x^{12} + k$ d) $3x + k$ e) $x^6 + k$

TH.63 (PUC-71) Seja:

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

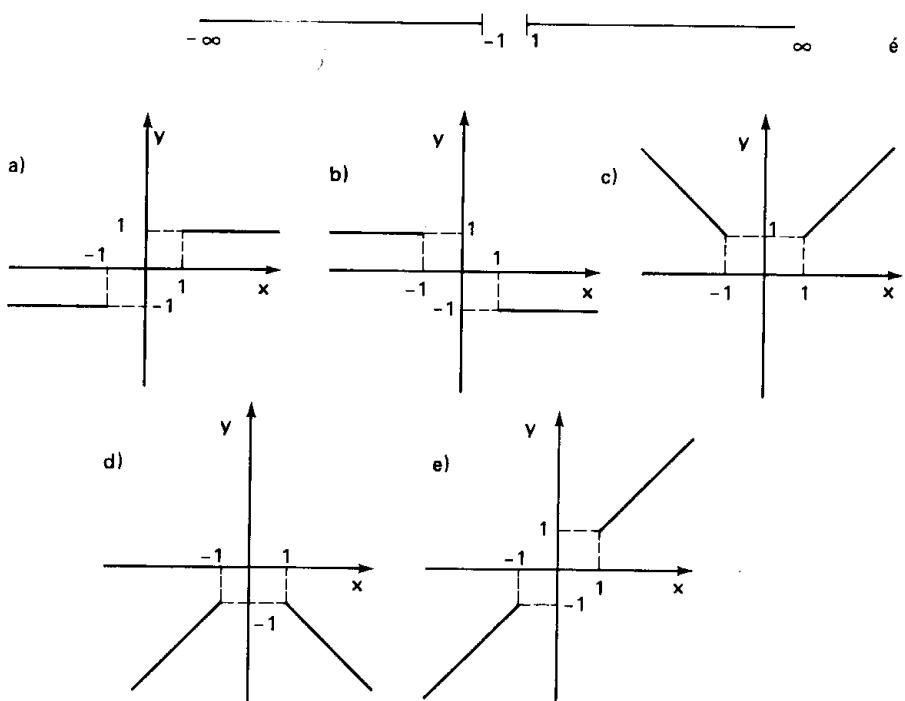
Pode-se afirmar que a função $f(x)$:

a) tem o limite -2 no ponto $x_0 = 2$

b) é derivável no ponto $x_0 = 2$

c) é descontínua no ponto $x_0 = 2$

d) não é definida no ponto $x_0 = 2$

e) assume o valor -2 no ponto $x_0 = 2$

TH.64 (EPUSP-68) Considere-se a função f definida por $f(x) = 2x + 1$, para $x = 1$, e $f(x) = x^2 - 1$, para $x > 1$.

a) f é contínua em qualquer ponto.

b) f não é definida no ponto $x = 1$.

c) f é derivável em qualquer ponto.

d) a derivada de f tem limite quando x tende a 1.

e) nenhuma das anteriores.

TH.65 (PUC-70) Sobre a derivada da função $y = f(x) = |x - 7|$, pode-se afirmar:

a) $f'(x) = |1|, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = 1$, se $x > 0$

d) $f'(x) = -1$, se $x < 0$

e) nenhuma das respostas anteriores

TH.66 (MACK-73) Seja f a função definida por $f(x) = |x|$. O gráfico da função f' (f' é a função derivada da função f) restrita ao conjunto

é

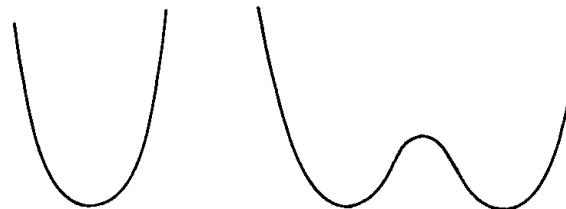
a)

b)

c)

d)

e)

TH.67 (CICE-68) O valor de a para o qual a função $y = a \cdot x \cdot e^{-x^2}$ tem um máximo no ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é igual a:

a) $\sqrt{e}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{\frac{2}{e}}$ d) $\sqrt{\frac{e}{2}}$ e) indeterminado

TH.68 (FUVEST-78) Sendo b e c reais, a função f, definida por

$f(x) = x^4 + bx^2 + c$,

tem um ou dois pontos de mínimo (ver figura). Terá dois pontos de mínimo se e somente se:

a) $b^2 - 4c \geqslant 0$ b) $b^2 - 4c > 0$ c) $b < 0$ d) $c < 0$ e) $bc < 0$

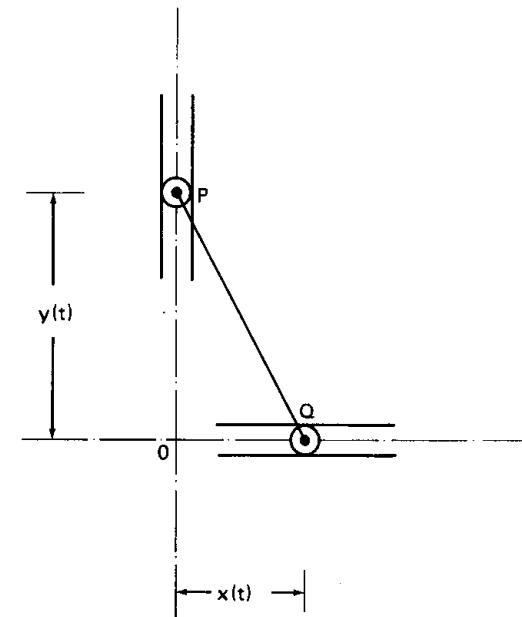
TH.69 (PUC-71) Uma função real de variável real y, cuja derivada primeira é $y' = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \neq 0$, possui a propriedade:

a) y tem valor máximo para $x = 1$
b) y tem valor mínimo para $x = 1$
c) é sempre crescente
d) é sempre decrescente
e) é crescente se $x > 0$ e decrescente se $x < 0$

TH.70 (PUC-71) Na função $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ as coordenadas do ponto de inflexão são:

a) (1, -10) b) (2, 10) c) (-1, 20) d) (-1, -10) e) (2, -10)

TH.71 (EPUSP-68) No intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$ a função $2x/(x^2 + 2)$

a) tem ponto de mínimo e ponto de máximo.
b) tem ponto de mínimo mas não de máximo.
c) tem ponto de máximo mas não de mínimo.
d) tem ponto de inflexão horizontal.
e) nenhuma das anteriores.

TH.72 (CICE-70) Seja $f(x)$ uma qualquer função estritamente crescente no intervalo (a, b) e possuindo derivada segunda $f''(x)$ contínua em (a, b). Pode-se afirmar que:

a) a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é positiva em (a, b)
b) $f''(x)$ é positiva em (a, b)
c) Se $f'(x)$ se anula em algum ponto x_0 de (a, b), então $f''(x_0) = 0$
d) $f''(x)$ é negativa em (a, b)
e) todas as afirmações são falsas

TH.73 (GV-73) Dentre todos os números x e y tais que $2x + y = 60$ existe um par a e b para o qual o produto xy é o maior possível. Então $b - a$ vale:

a) 0 b) 10 c) 50 d) 15 e) 5

TH.74 (COMBITEC-COMBIMED-75) Cada extremidade de uma haste PQ de comprimento 8 é forçada a mover-se em uma guia, como indicado na figura.

Se ao ponto Q se imprime um movimento definido por $x(t) = 4 \text{ sen } 3t$, a velocidade de P em qualquer instante t é:

a) $\frac{-2 \text{ sen } 6t}{\sqrt{4 - \text{sen}^2 3t}}$ b) $4 \cos 3t$

c) $12 \cos 3t$ d) $\frac{-6 \text{ sen } 6t}{\sqrt{4 - \text{sen}^2 3t}}$

e) $4\sqrt{9 - 4 \cos^2 3t}$

TH.75 (PUC-72) A altura do cilindro circular reto de volume V máximo, que pode ser inscrito em uma esfera de raio R é:

a) $\frac{R}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{R}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{2R}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3R}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

TH.76 (MACK-74) Sendo $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e $f'(x) = \frac{d}{dx}[\log_e x] = \frac{1}{x}$, $\forall\ x > 0$,

podemos concluir que $L = \lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{1 - x}$ é igual a:

a) 0; b) -1; c) 1; d) 2; e) -2.

TH.77 (CESCEA-73) A equação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto (1, 1) é:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = -x + 2$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = x$

TH.78 (PUC-73) A equação da tangente à curva $y = x^2 + 1$ no ponto da abscissa $x = 1$ é:

a) $2x + y = 0$ b) $x + y = 0$ c) $x - y = 0$
d) $x - 2y = 0$ e) $2x - y = 0$

TH.79 (MACK-73) A equação da reta tangente a curva $y = x^3$, no ponto $x = 1$ é:

a) $y = 6x - 4$ b) $y = 3x$ c) $y = 3x - 3$
d) $y = 3x - 2$ e) $y = 6x + 5$

TH.80 (MACK-74) Uma tangente a curva $f(x) = x^2$ é paralela à reta $8x - 2y + 5 = 0$. Então o ponto de tangência é:

a) (-2, 4); b) (2, 4); c) (4, 2); d) (-4, 2); e) nenhum dos anteriores.

TH.81 (FUVEST) A equação da reta que é tangente à curva de equação $y = x|x|$, no ponto (-1, -1), é:

a) $y = 2x$ b) $y = -2x - 1$ c) $y = -2x - 3$ d) $y = -2x$ e) $y = 2x + 1$

TH.82 (GV-71) O ponto (x, y) do 1º quadrante no qual a tangente ao gráfico da função dada por $y = x^3 - 6x$ é paralela ao eixo dos x é tal que x^2 vale:

a) 0 b) 25 c) 4 d) 2 e) nenhuma das alternativas anteriores

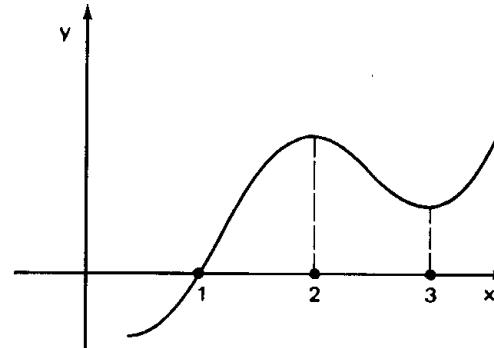
TH.83 (MACK-74) Seja a curva de equação $y = \text{tg}\, x$. A tangente a esta curva no ponto de abscissa $x = \pi/4$ é perpendicular à reta:

a) $x - 2y + 3 = 0$ b) $2x - y + 3 = 0$ c) $2x + 2y - 3 = 0$
d) $x + 2y + 3 = 0$ e) $x + y = 0$

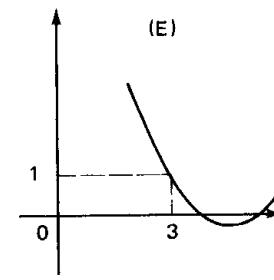
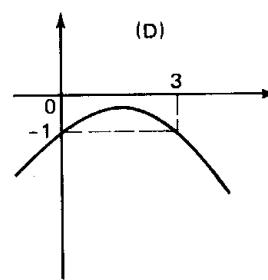
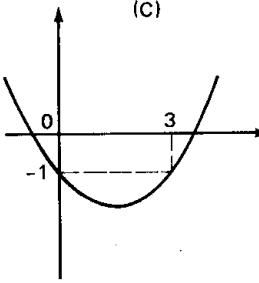
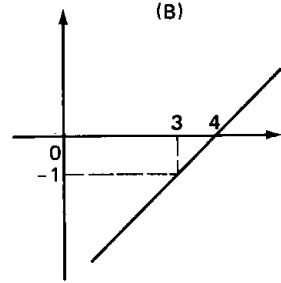
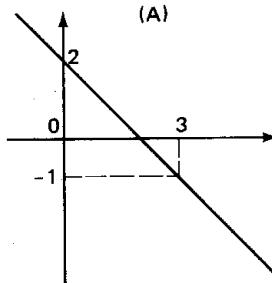
TH.84 (E.E.LINS-68) O ponto de contacto da tangente à curva $y = \sqrt{x^2 - 16}$ e paralela à reta $5x + 3y - 2 = 0$ é:

a) (5, 3) b) (-5, 3) c) (-3, 5)
d) (-3, -5) e) nenhuma das respostas anteriores

TH.85 (PUC-78) A equação da reta tangente à elipse da equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P = (3, \frac{12}{5})$ é:

a) $y - \frac{12}{5} = \frac{9}{20}(x - 3)$ b) $y - \frac{12}{5} = \frac{3}{10}(x - 3)$ c) $y - \frac{12}{5} = -\frac{3}{10}(x - 3)$
d) $y + \frac{12}{5} = -\frac{1}{3}(x - 3)$ e) $y - \frac{12}{5} = -\frac{9}{20}(x - 3)$

TH.86 (CESCEM-73) Dado o trinômio do 2º grau $y = x^2 + bx + \frac{b^2 + 4}{4}$, o seu polinômio derivado tem como gráfico uma reta tangente ao gráfico do trinômio. Então, a ordenada do ponto de tangência.

a) é sempre igual a 2, qualquer que seja o valor de b.
b) é igual a 4 para b = 0.
c) é igual a *b* para b = 3.
d) não pode ser determinada, pois a condição de tangência é impossível, na hipótese formulada.
e) é igual a 5 para algum valor de b.

TH.87 (FEI-67) Se a derivada da função f(x) é $\frac{x + 1}{x - 1}$, então f é crescente nos intervalos:

a) (-1, 0) e (0, 1) b) $(-\infty, -1)$ e (-1, 1) c) $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$
d) (-1, 1) e $(1, +\infty)$ e) nenhuma das respostas anteriores

TH.88 (EPUSP-65) Se a derivada de um polinômio P(x) apresentar o seguinte gráfico

a) P(x) será crescente de 1 a 2 e decrescente de 2 a 3
b) P(x) terá três zeros reais e distintos
c) P(x) apresentará um máximo para x = 2
d) P(x) se anulará para x = 1
e) nenhuma das respostas anteriores

TH.89 (CONSART-75) Sabendo que a função derivada f' é estritamente crescente e que f'(3) = -1, o gráfico que pode representar f é

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

TH.90 (PUC-71) A função $y = x^3$:

a) tem valor máximo para $x = 0$
b) tem valor mínimo para $x = 0$
c) tem um extremo em $x = 0$
d) não tem máximo nem mínimo
e) não tem tangente no ponto $x = 0$

TH.91 (PUC-71) A função $y = x^3 - 3x$ tem um ponto de mínimo relativo para x igual a:

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) $\frac{1}{3}$

TH.92 (CICE-70) O maior valor de $x^2 - |x| + 1$ no intervalo $[-3, 3]$ é:

a) 2 b) -3 c) 0 d) 6 e) 7

TH.93 (CICE-68) O(s) extremo(s) relativo(s) do gráfico da função $y = |x^2 + 4x|$ são:

a) (-2, -4), (0, 0) b) (-4, 0), (-2, -4) c) (-2, 4), (-2, -4)
e) (-4, 0), (-2, 4), (0, 0) d) (-2, -4)

TH.94 (PUC-74) O ponto de máximo da função

$y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 1$ no intervalo $[-\frac{3}{2}, 3]$ é:

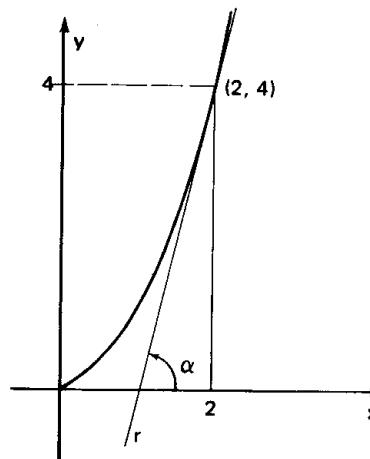
a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = -1$ c) $x_0 = 2$ d) $x_0 = 1$ e) $x_0 = -2$

TH.95 (USP-67) A função $y = \frac{1}{1 + x^2}$

a) tem máximo no ponto $x = 0$.
b) tem mínimo no ponto $x = 0$.
c) não tem máximo nem mínimo.
d) tem máximo e mínimo
e) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

TH.96 (PUC-78) A função $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ $(x \neq \pm 2)$ tem um ponto de máximo para x igual a:

a) 1 b) 2 c) -1 d) 0 e) -2

TH.97 (FFCLUSP-69) Para que a equação algébrica

$x^3 - (4 + m)x^2 + (4 + 4m)x - 4m = 0$

admita o valor 2 como raiz dupla, o valor de m deve ser:

a) $\neq 2$ b) 2 c) > 0 d) < 3 e) n.r.a.

NOÇÕES DE INTEGRAL

TH.98 (CESCEA-74) Na figura abaixo, a reta r é tangente ao gráfico da função dada por $y = x^2$, no ponto (2, 4). Determinar a área hachurada da figura sabendo que ela vale 2/3 da tangente do ângulo α.

a) 8/3 b) 10/3 c) 4/3 d) 14/3 e) não sei.

TH.99 (EPUSP-67) A derivada da função $f(x)$ é $\frac{1}{1 + x^2}$. Se $f(0) = 1$, então $f(1)$ é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{4} + 1$ d) nenhuma das respostas anteriores

TH.100 (CICE-68) Seja $y(x)$ uma função cuja primeira derivada vale $y' = 15x^2 - 6x + 2$. Sabendo que $y(1) = 5$, $y(x)$ é igual a:

a) $3x^2 + 2x$
b) $3x^3 - 2x + 4$
c) $5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
d) $5x^3 - 3x^2 + x + 2$
e) $5x^3 - 3x^2 + 2x$

RESPOSTAS

TH.1 b
TH.2 d
TH.3 b
TH.4 d
TH.5 b
TH.6 e
TH.7 d
TH.8 d
TH.9 a
TH.10 e
TH.11 c
TH.12 d
TH.13 e
TH.14 c
TH.15 a
TH.16 b
TH.17 a
TH.18 c
TH.19 e
TH.20 c
TH.21 b
TH.22 c
TH.23 d
TH.24 a
TH.25 d
TH.26 b
TH.27 d
TH.28 d
TH.29 b
TH.30 b
TH.31 d
TH.32 b
TH.33 c
TH.34 b
TH.35 b
TH.36 c
TH.37 a
TH.38 b
TH.39 d
TH.40 d
TH.41 e
TH.42 d
TH.43 b
TH.44 b
TH.45 e
TH.46 b
TH.47 b
TH.48 e
TH.49 e
TH.50 c
TH.51 a
TH.52 d
TH.53 d
TH.54 e
TH.55 c
TH.56 c
TH.57 b
TH.58 e
TH.59 c
TH.60 c
TH.61 c
TH.62 b
TH.63 c
TH.64 d
TH.65 d
TH.66 a
TH.67 a
TH.68 c
TH.69 d
TH.70 a
TH.71 e
TH.72 c
TH.73 d
TH.74 d
TH.75 e
TH.76 b
TH.77 a
TH.78 e
TH.79 d
TH.80 b
TH.81 e
TH.82 d
TH.83 d
TH.84 b
TH.85 e
TH.86 a
TH.87 c
TH.88 e
TH.89 e
TH.90 d
TH.91 b
TH.92 e
TH.93 e
TH.94 d
TH.95 a
TH.96 d
TH.97 a
TH.98 a
TH.99 c
TH.100 c